



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه



نام آزمون: گسسته تشریحی جامع

تاریخ آزمون:

۱ مجموعه  $S = \{1, 2, \dots, 400\}$  را در نظر بگیرید. چند عدد در  $S$  وجود دارند، به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند؟

۲ ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح  $a, b, c$  و عدد طبیعی  $m$ ، اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  آن گاه  $ac \equiv bc \pmod{m}$ .

۳ ثابت کنید: اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد  $a$  و  $b$  بر  $m$  مساوی باشند آن گاه  $a \equiv b \pmod{m}$ .

۴ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر  $3!$  بخش پذیر است.

۵ با فرض اینکه  $\sqrt{6}$  عددی گنگ است ثابت کنید عدد  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  نیز عددی گنگ است.

۶ از راه های به دست آوردن غذای بیشتر و بهتر، ..... است.

۷ الف) گراف  $P_8$  را رسم کنید.

ب) یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۸ گراف  $P_{12}$  را رسم کنید.

الف) یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

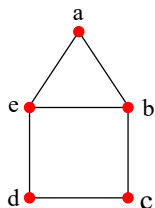
۹ ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  عدد صحیح و مخالف صفر باشند آنگاه  $(a, b) = |ab|$ ،  $[a, b]$ .

۱۰ تمام جواب های  $n$  که به ازای آن ها معادله  $(2m^2 + 1)x + (2m - 4)y = n$  همواره در  $\mathbb{Z}$  جواب دارد را بیابید:

۱۱ اگر  $x, y$  جواب هایی از معادله سیاله  $14x + 11y = 56$  باشند آنگاه باقیمانده تقسیم  $x$  بر ۱۱ را بیابید:

۱۲ در یک تقسیم مقسوم ۸۴ واحد بیشتر از مقسوم علیه است اگر باقیمانده برابر ۷ باشد تمام مقادیر ممکن برای خارج قسمت را بیابید.

۱۳ تمام مجموعه های احاطه گر مینیمم را برای گراف زیر بنویسید.



۱۴ ابتدا گراف  $P_9$  را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه گر مینیمم از آن را مشخص کنید.

۱۵ تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

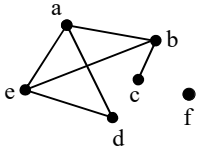
۱۶ اگر باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد  $2a + 3$  بر ۸ را به دست آورید.

۱۷ به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل، ۱۲ شاخه انتخاب کرد، اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم؟

۱۸ در بین اعداد طبیعی مانند  $n$  به طوری که  $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟

۱۹ اگر باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد  $2a + 3$  بر ۸ را به دست آورید.

۲۰ گراف  $G$  را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف)  $N_G[a]$  را با اعضا مشخص کنید.

ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.

پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از  $a$  به  $c$  بنویسید.

# پاسخنامه تشریحی

۱ داریم:

$$A = \{n \in S | n = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left[ \frac{400}{5} \right] = 80$$

$$B = \{n \in S | n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left[ \frac{400}{7} \right] = 57$$

$$A \cap B = \{n \in S | n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{35} \right] = 11$$

در نتیجه:

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 400 - (80 + 57 - 11) = 274$$

۲

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc$$

۳ طبق فرض می توان نوشت  $a = mq + r$  و  $b = mq' + r$  داریم:

$$a - b = mq + r - (mq' + r) = mq - mq' = m(q - q') = mk$$

بنابراین  $m|a - b$  در نتیجه  $a \equiv b$ .

۴ اعداد صحیح متوالی دلخواه  $m, n + 1$  و  $n - 1$  را در نظر می گیریم با توجه به تمرین ۱۱ نشان دادیم که حاصل ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش پذیر است از طرفی می دانیم حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی نیز بر ۲ بخش پذیر است؛ پس حاصل ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی نیز مضرب ۲ می باشد؛ در نتیجه  $n(n + 1)(n - 1)$  بر ۳! بخش پذیر است.

۵ با روش برهان خلف پیش می رویم:

فرض می کنیم  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  عددی گویا مانند  $q$  باشد. داریم:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = q \rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = q^2 \rightarrow 2 + 3 + 2\sqrt{6} = q^2$$

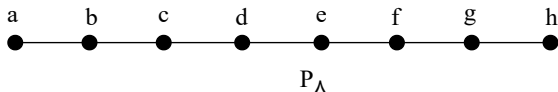
$$\rightarrow 2\sqrt{6} = q^2 - 5 \rightarrow \sqrt{6} = \frac{q^2 - 5}{2}$$

گویا بودن  $\frac{q^2 - 5}{2}$  با گنگ بودن  $\sqrt{6}$  در تناقض است بنابراین  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  گنگ است.

۶ شناخت بیشتر گیاهان

۷

(الف)

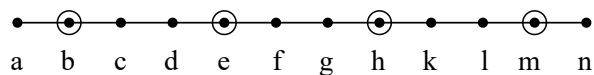


(ب) یک  $\gamma$ -مجموعه برابر است با:  $\{a, d, g\}$

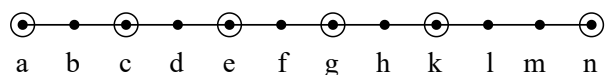
(ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی برابر است با:  $\{a, d, e, h\}$

۸

(الف)



(ب)  $\{b, e, h, m\}$  یک مجموعه احاطه گر مینیم است.  $\gamma(G) = 4$



$\{a, c, e, g, k, n\}$  یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.

۹ فرض کنید  $(a, b) = d$  داریم:

$$(a, b) = d \rightarrow \begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \\ (a', b') = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \end{cases} \rightarrow [a, b] = |a'b'|d$$

$$[a, b] \cdot (a, b) = |a'b'|d^2 = |a'd \cdot b'd| = |a \cdot b|$$

۱۰ فرض کنید  $d | n$  باید  $(2m^2 + 1, 2m - 4) = d$  می توان نوشت:



$$\left. \begin{array}{l} d|2m - 4 \rightarrow d|2m^2 - 4m \\ d|2m^2 + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d|4m + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} d|4m + 1 \\ d|2m - 4 \rightarrow d|4m - 8 \end{array} \right\} \rightarrow d|9$$

بنابراین اگر  $n = 9k$  باشد  $d$  در هر صورت آن را عاد خواهد کرد.

۱۱) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} 14x + 11y = 56 &\rightarrow 14x \equiv 56 \xrightarrow{14 \equiv 2} 3x \equiv 56 - 55 \rightarrow 3x \equiv 1 \\ \rightarrow 3x &\equiv 11 + 1 \equiv 12 \xrightarrow{(3,11)=1} x \equiv 4 \end{aligned}$$

بنابراین هر  $n$  که در معادله مذکور صدق کند در تقسیم بر ۱۱ باقیمانده ۴ می آورد.

۱۲) طبق فرض می توان نوشت:

$$\begin{aligned} b + 84 &= bq + 7, \quad b > 7 \rightarrow b(q-1) = 77 = 77 \times 11 \\ b = 11 &\rightarrow q - 1 = 7 \rightarrow q = 8 \\ b = 11 \times 7 &\rightarrow q - 1 = 1 \rightarrow q = 2 \end{aligned}$$

پس دو مقدار برای خارج قسمت وجود دارد.

۱۳) مجموعه های احاطه گر مینیمم برای این گراف ۲ عضو دارند. یعنی:

$$\gamma(G) = 2$$

اگر رأس  $a$  را ملاک قرار دهیم، این رأس با هر رأس دیگر به جز  $e$  و  $b$  یک مجموعه احاطه گر با ۲ عضو می سازد.

$$\{a, c\}, \{a, d\} \rightarrow \text{حالت ۲}$$

اگر رأس  $e$  را ملاک قرار دهیم:

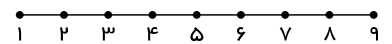
$$\{e, c\}, \{e, d\}, \{e, b\} \rightarrow \text{حالت ۳}$$

اگر رأس  $b$  را ملاک قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \{b, d\}, \{b, c\} &\rightarrow \text{حالت ۲} \\ \underline{2 + 3 + 3} &= 8 \end{aligned}$$

۱۴)

$$D = \{2, 5, 8\}$$



۱۵) اگر فرض کنیم  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  و  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_7\}$ ، برای تعریف  $f$  روی هر عضو  $A$ ،  $\gamma$  انتخاب داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع های

$$\text{یک به یک برابر است با } \frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

۱۶)

$$\begin{aligned} a = 4q + 3 &\xrightarrow{\times 2} 2a = 8q + 6 \\ +3 & \\ \rightarrow 2a + 3 &= 8q + 9 = 8q' + 1 \\ \text{باقی مانده} &= 1 \end{aligned}$$

۱۷)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 > 3, \quad x_6 = 1$$

$$y_1 = x_1 - 1, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 = x_2 - 4, \quad y_2 \geq 0$$

$$y_1 + 1 + x_3 + x_4 + y_2 + 4 + x_5 + 1 = 12 \Rightarrow y_1 + x_3 + x_4 + y_2 + x_5 = 6 \Rightarrow \text{حالات مطلوب} = \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

۱۸)

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3 \Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

۱۹)

$$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8 \underbrace{(q+1)}_{q'} + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$$

الف

$$N_G[a] = \{a, b, e, d\}$$

ب دور به طول ۴،  $abeda$ پ مسیر به طول ۳،  $aebc$  و مسیر به طول ۴،  $adebc$