

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: گسسته آزمون جامع تستی

تاریخ آزمون:

۱ کدام گزینه درست است؟

$(a + b)|(a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$ (۲)

$(a + b)|(a + b)^2 - 2ab$ (۱)

$(a + b)|(a - b)^2 + 2ab$ (۴)

$(a + b)|(a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$ (۳)

۲ اگر x و y دو عدد صحیح باشند، کدام گزاره همواره درست است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$x + y = 2k + 1 \Rightarrow xy = 2k$ (۲)

$x + y = 2k \Rightarrow xy = 2k$ (۱)

$x + y = 2k + 1 \Rightarrow xy = 2k + 1$ (۴)

$x + y = 2k \Rightarrow xy = 2k + 1$ (۳)

۳ با حروف کلمه «بستنی» چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار حروف می توان نوشت به طوری که بین «ت» و «س» دقیقاً یک حرف قرار بگیرد؟

۶۰ (۴)

۴۸ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

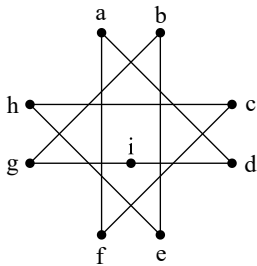
۴ گراف مقابل چند ۷-مجموعه دارد؟

۲ (۲)

۳ (۱)

۴ (۴)

۱ (۳)



۵ چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی مانده تقسیم ۹۶ بر هر یک از آنها، برابر ۶ باشد؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۶ حداقل چند زیرمجموعه از مجموعه اعداد طبیعی فرد یک رقمی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم دو مجموعه جدا از هم در میان آنها موجود است؟

۱۷ (۴)

۱۳ (۳)

۹ (۲)

۵ (۱)

۷ با جابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان تشکیل داد، به طوری که رقم های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

۸ مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی n که به ازای آن، دو عدد $15n + 2$ و $12n - 1$ نسبت به هم اول نباشند، کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۹ باقی مانده تقسیم 5^{100} بر ۳۵ کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۱۰ تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x + y + z = 12$ با شرط $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y$ کدام است؟

۵۵ (۴)

۳۴ (۳)

۲۸ (۲)

۲۱ (۱)

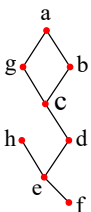
۱۱ عدد احاطه گری در گراف زیر کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)



۱۲) معادله $(x - 7)(x - 5) \equiv 13 \pmod{10}$ چند جواب در فاصله ۱ تا ۱۰ دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳) ۵ نفر می‌خواهند وارد یک اتاق شوند. چند حالت مختلف برای ترتیب وارد شدن آنها وجود دارد؟

- ۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۸

۱۴) بیشترین درجه رأس یک گراف ناهمبند مرتبه ۹ که بیشترین تعداد یال را دارد برابر ۴ می‌باشد. حاصل $q_{\bar{G}} - q_G$ کدام است؟

- ۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۵) به چهار برابر حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی یک واحد اضافه کرده‌ایم و آن را x می‌نامیم، چند عدد مانند x در بازه $(450, 500]$ وجود دارد؟

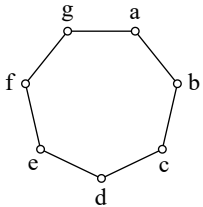
- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۶) یک مخزن آب ۷۷ لیتری را به چند طریق می‌توانیم با ظرف‌های ۲ و ۶ لیتری پر از آب کنیم؟

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۷

۱۷) در گراف مقابل چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۹

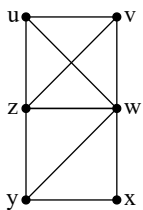


۱۸) کدام یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در \mathbb{Z} جواب ندارد؟

- ۱) $91x \equiv 10 \pmod{13}$ ۲) $8x \equiv 10 \pmod{6}$ ۳) $3x \equiv 15 \pmod{9}$ ۴) $18x \equiv 36 \pmod{27}$

۱۹) با حروف کلمه *ambient* چند کلمه ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری که در آنها عبارت *ent* وجود داشته باشد اما عبارت *am* وجود نداشته باشد؟

- ۱) ۷۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۱۴ ۴) ۱۲۰



۲۰) در گراف شکل مقابل، چند مسیر از u به v وجود دارد؟

- ۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$(a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 \Rightarrow a+b \mid a^3 + b^3$$

$a+b \mid a^n + b^n$; های طبیعی و فرد n

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه اول: اگر حاصل جمع x و y زوج باشد، یا هر دوی این اعداد زوج هستند یا هر دو فرد هستند. در حالت اول حاصل ضرب زوج می‌شود ولی در حالت دوم حاصل ضرب فرد می‌شود. پس این گزینه همواره درست نیست.

گزینه دوم: اگر حاصل جمع x و y فرد باشد، یکی از اعداد زوج است و یکی فرد است و در این حالت به خاطر عدد زوج، حاصل ضرب زوج می‌شود. پس این گزینه همواره درست است.

گزینه سوم: در گزینه اول بررسی شد که حالت حاصل ضرب زوج هم وجود دارد. پس این گزینه همواره درست نیست.

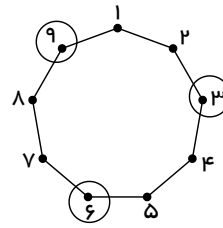
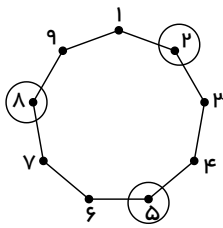
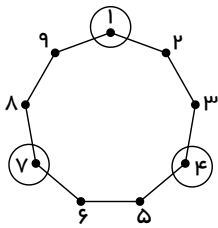
گزینه چهارم: در گزینه دوم بررسی شد که اگر یکی از اعداد زوج باشد و یکی فرد باشد حاصل ضرب همواره زوج است. پس این گزینه همواره غلط است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ این حالات را برای قرارگیری «ت» و «س» در کلمه پنج حرفی داریم: $\frac{ت}{س} \frac{س}{ت} \frac{ت}{س} \frac{س}{ت} \frac{ت}{س}$ یا $\frac{س}{ت} \frac{ت}{س} \frac{س}{ت} \frac{ت}{س} \frac{س}{ت}$ ، پس سه حالت در اینجا

داریم و دو حالت هم که خود «ت» و «س» می‌توانند جایشان را با هم عوض کنند. بقیه حروف در سه جایگشت دیگر به تعداد $1 \times 2 \times 3 = 6$ حالت غیر تکراری می‌توانند قرار گیرند. حال همه حالات را در هم ضرب می‌کنیم: $6 \times 3 \times 2 = 36$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

این گراف را می‌توان به شکل یک گراف C_9 درآورد مطابق شکل‌های زیر C_9 دارای ۳ مجموعه احاطه گر مینیمم (۷-مجموعه) می‌باشد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$96 \mid \frac{b}{q} \Rightarrow 96 = bq + 6 ; 6 < b$$

$$\Rightarrow 90 = bq \Rightarrow b \mid 90$$

پس b یکی از مقسوم‌علیه‌های بزرگتر عدد ۹۰ می‌باشد.

$$b = 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$$

پس برای $b, 7$ مقدار طبیعی وجود دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ مجموعه اعداد طبیعی فرد یک رقمی عبارت است از $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ که دارای $2^5 = 32$ زیرمجموعه می‌باشد. در بین این ۳۲ زیرمجموعه، می‌توان ۱۶ دسته ایجاد کرد که هر دسته شامل ۲ زیرمجموعه بوده که اشتراک آن‌ها تهی است مانند $\{5, 7, 9\}$ یا $\{1, 3\}$ ، بنابراین با انتخاب $16 + 1 = 17$ زیرمجموعه از

مجموعه اعداد طبیعی فرد یک رقمی، حداقل ۲ زیرمجموعه متعلق به یک دسته وجود خواهد داشت که اشتراک آن‌ها تهی باشد.

تذکر: طبق تعریف صفحه ۴۸ کتاب درسی، دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا گوئیم هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ وضعیت ۳ رقم ۲ در کنار هم به شکل یک‌درمیان به صورت $2 \circ 2 \circ 2$ می‌باشد. واضح است جای مکان‌های خالی ارقام ۶ و ۷ به $3!$ حالت جابه‌جا می‌شوند. از طرفی شروع عدد می‌تواند با ارقام غیر ۲ باشد که ۲ حالت نیز اینجا داریم. بنابراین تعداد حالات $2 \times 3! = 12$ می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ فرض کنید $d \mid (15n + 2, 12n - 1) = d$ و $d \neq 1$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 15n + 2 \xrightarrow{\times 4} d \mid 60n + 8 \\ d \mid 12n - 1 \xrightarrow{\times 5} d \mid 60n - 5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 13 \xrightarrow{d \neq 1} d = 13$$

$$13 \mid 12n - 1 \Rightarrow 12n - 1 \equiv 11^3 \pmod{13} \Rightarrow 12n \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow -n \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow n \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow n = 13q - 1 \quad (q \in \mathbb{Z})$$

کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی n به ازای $q = 8$ به دست می‌آید:

$$n = 13 \times 8 - 1 = 103 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$5 \equiv 5 \pmod{100} \xrightarrow{\text{به توان ۱۰۰}} 5^{100} \equiv 5 \pmod{100}$$

$$5 \equiv -2 \pmod{7} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} 5^3 \equiv (-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{به توان ۲۳}} 5^{99} \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{\times 5} 5^{100} \equiv -5 \pmod{7}$$

$$\left. \begin{aligned} 5^{100} &\equiv 5^0 \equiv -5 \\ 5^{100} &\equiv -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5^{100} \equiv -5 \equiv 3^0$$

ابتدا شرطهای $x \geq 2$ و $y \geq 1$ را با تغییر متغیر اعمال می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

$$x \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x - 2}_{x'} \geq 0 \Rightarrow x = x' + 2$$

$$y \geq 1 \Rightarrow \underbrace{y - 1}_{y'} \geq 0 \Rightarrow y = y' + 1$$

$$(x' + 2) + (y' + 1) + z = 12 \Rightarrow x' + y' + z = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{9 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

ولی بعضی از این جواب‌ها به درد ما نمی‌خورند! کدام‌ها؟ آن‌هایی که $x \geq 6$ است. باید تعداد جواب‌هایی را که $x \geq 6$ و $y \geq 1$ است پیدا کنیم و از ۵۵ کم کنیم:

$$y \geq 1 \Rightarrow \underbrace{y - 1}_{y'} \geq 0 \Rightarrow y = y' + 1$$

$$x \geq 6 \Rightarrow \underbrace{x - 6}_{x'} \geq 0 \Rightarrow x = x' + 6$$

$$(x' + 6) + (y' + 1) + z = 12 \Rightarrow x' + y' + z = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{5 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$55 - 21 = 34$$

پس جواب نهایی برابر می‌شود با:

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)

$$n = 8 \quad \left[\frac{n}{\Delta + 1} \right] \leq \gamma(G) \Rightarrow \left[\frac{8}{3 + 1} \right] \leq \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

از طرفی برای گراف فوق مجموعه $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. پس $\gamma(G) = 3$

معادله به‌ازای $x = 5$ و $x = 7$ برقرار است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲)

$$(x - 7)(x - 5) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 5 \\ x - 7 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 7 \end{cases}$$

روش اول: برای نفر اول ۵ حالت وجود دارد. بعد از اینکه نفر اول وارد شد، برای نفر دوم ۴ حالت وجود دارد. به همین ترتیب برای نفر سوم ۳ حالت، نفر چهارم ۲ حالت و نفر آخر یک حالت وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

روش دوم: تعداد حالات برابر با تعداد جایگشت‌های ۵ نفر برابر با ۵! است.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

حالت ۱: نفر پنجم
حالت ۲: نفر چهارم
حالت ۳: نفر سوم
حالت ۴: نفر دوم
حالت ۵: نفر اول

چون گراف ناهمبند مرتبه ۹ است و دارای بیشترین تعداد یال است، پس دارای دو بخش می‌باشد که یک بخش آن K_5 و دیگری K_4 است، پس تعداد یال‌ها برابر است با:

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

$$q_G = \frac{5 \times 4}{2} + \frac{4 \times 3}{2} = 10 + 6 = 16$$

$$q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \Rightarrow q_{\bar{G}} = 36 - 16 = 20 \Rightarrow q_{\bar{G}} - q_G = 20 - 16 = 4$$

اگر دو عدد متوالی را a و $a + 1$ در نظر بگیریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$4a(a+1) + 1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2 \Rightarrow 50 \leq (2a+1)^2 < 450 \Rightarrow 8 \leq 2a+1 \leq 21$$

$$\Rightarrow 7 \leq 2a \leq 20 \Rightarrow 4 \leq a \leq 10 \Rightarrow a = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

یعنی اعداد مربوطه برابرند با: $9^2, 11^2, 13^2, 15^2, 17^2, 19^2, 21^2$

تعداد ظرف‌های ۲ لیتری را برابر x و تعداد ظرف‌های ۶ لیتری را برابر y در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم $2x + 6y = 77$ شود. پس باید معادله سیاله (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

$2x + 6y = 77$ را حل کنیم. سپس جواب‌هایی را که x و y بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند را انتخاب کنیم. تعداد این جواب‌ها، همان تعداد روش‌های پر کردن ظرف ۷۷ لیتری است، پس معادله $2x + 6y = 77$ را حل می‌کنیم. این معادله اصلاً در اعداد صحیح جواب ندارد. طرف چپ معادله همواره زوج است در حالی که طرف راست یک عدد فرد داریم! پس ما به هیچ طریقی نمی‌توانیم این مخزن ۷۷ لیتری را با ظرف‌های ۲ و ۶ لیتری پر از آب کنیم!

مسیرهای به طول ۳ در این گراف عبارتند از: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۷)

$abcd, bcde, cdef, defg, efga, fgab, gabc$

شرط آنکه معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد آن است که $(a, m) | b$. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸)

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$13 \times 13 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 13 \equiv 1 \pmod{13}$$



$$(۸, ۶) = ۲ \Rightarrow ۲|۱۰ \checkmark$$

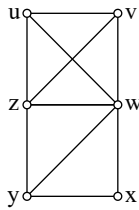
$$(۳, ۹) = ۳ \Rightarrow ۳|۱۵ \checkmark$$

$$(۱۸, ۲۷) = ۹ \Rightarrow ۹|۳۶ \checkmark$$

۱۹ چون می‌خواهیم عبارت ent در آن کلمه ۷ حرفی وجود داشته باشد $[ent]$ را به صورت یک بسته و حرف جدا در نظر می‌گیریم به نام X . پس تا اینجا پنج حرف داریم: X, i, b, m, a و دارای $1 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$ جایگشت هستیم.

اما از جایگشت‌های بالا بعضی از آنها دارای ترکیب am هستند. آنها را نباید در نظر بگیریم، پس تعداد حالت‌هایی که ترکیب $[am]$ (به صورت یک بسته و حروف جدید به نام Y) دارند را حساب می‌کنیم و از حالت قبلی کم می‌کنیم. پس تا اینجا چهار حرف داریم: Y, X, i, b و دارای $1 = 2 \times 3 \times 4$ حالت هستیم. در نهایت حالت‌هایی که برای ترکیب چهار حرف Y, X, i, b حساب شد از 120 حالت قبلی کم می‌شود یعنی: $120 - 24 = 96$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴



همه مسیرها از u به v :

- ۱ مسیر به طول ۱ : uv
- ۲ مسیر به طول ۲ : uvw, uzv
- ۳ مسیر به طول ۳ : $uzwv, uwzv$
- ۴ مسیر به طول ۴ : $uzywv, uwyzv$
- ۵ مسیر به طول ۵ : $uzyxwv, uwxzyv$

تعداد کل مسیرها = ۹

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴