نام و نام خانوادگی:　　　　　　　　　　زمان برگزاری: ۱۲۰دقیقه

نام آزمون: گسسته فصل اول تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.

۲) فرض کنید $a\overset{m}{\equiv}b$، آنگاه ثابت کنید: $ka\overset{km}{\equiv}kb$. $(k\in\mathbb{N})$.

۳) اگر n عددی صحیح باشد آنگاه n^2+5n عددی زوج است.

۴) فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد ولی تابع g در $x=a$ پیوسته نباشد ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

۵) ثابت کنید حاصلضرب هردو عدد فرد متوالی به علاوهٔ یک، مربع کامل است.

۶) گزارهٔ درست را اثبات کنید و برای گزارهٔ نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۷) اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۸) جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x+5y=11$ را به‌دست آورید.

۹) اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

۱۰) ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۱۱) ثابت کنید اگر $(a\,,\,b)=1\,,\,(a\,,\,c)=1$، آنگاه $(a\,,\,bc)=1$.

۱۲) باقیماندهٔ تقسیم 17^{19} بر ۲۵ را بیابید.

۱۳) یک عدد مربع کامل در تقسیم بر ۵ چه باقیمانده‌هایی می‌تواند داشته باشد؟

۱۴) فرض کنید $a\,,\,b$، ۲ عدد صحیح باشند و $11\mid 2a-3b$ ثابت کنید: $11\mid 7a-5b$.

۱۵) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2a-5b)$ بر ۱۷ را بیابید.

۱۶) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$.

۱۷) جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x+13y=7$ را به‌دست آورید.

۱۸) گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.

ب) برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$.

پ) معادلهٔ همنهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a,b)|m$.

۱۹) اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از همنهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن همان سال چه روزی از هفته است؟

الف) معادلهٔ همنهشتی $8x\overset{11}{\equiv}20$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به‌دست آورید.

۲۰) عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.

ب) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a|b$، برای هر $m\in Z$ داریم: ($a|mb$ ،$ma|b$).

پ) اگر $a|b$ آنگاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با ($|a|$ ،a) است.

ت) اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(c,m)=d$ آنگاه رابطه ($a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$ و $a\overset{m}{\equiv}b$) برقرار خواهد بود.

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ اگر $\alpha + ۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.
از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.
می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست درنتیجه: $(\alpha + ۲\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$
اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.
با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲ طبق فرض مسئله داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m|a-b \to km|k(a-b) \to km|ka-kb \to ka \overset{km}{\equiv} kb$$

۳ دو حالت می‌توان در نظر گرفت:
(۱) n زوج است در این صورت می‌توان فرض کرد $n = ۲k$ که $k \in \mathbb{Z}$ در نتیجه:

$$n^۲ + ۵n = ۴k^۲ + ۱۰k = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۵k}_{q}) = ۲q$$

پس $n^۲ + ۵$ عددی زوج است.
(۲) n فرد است. در این صورت $n = ۲k + ۱$ که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

$$n^۲ + ۵n = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۱۰k + ۵ = ۴k^۲ + ۱۴k + ۶ = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۷k + ۳}_{q}) = ۲q$$

پس در این حالت نیز $n^۲ + ۵n$ عددی فرد است بنابراین $n^۲ + ۵n$ همواره عددی زوج است.

۴ به برهان خلف فرض می‌کنیم $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه چون f در $x = a$ پیوسته است پس $f + g - f$ نیز در $x = a$ پیوسته است یعنی g در a پیوسته است که تناقض است. بنابراین باید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته باشد.

۵ اثبات به روش مستقیم است:
فرض کنید $۲k + ۱$ و $۲k + ۳$ دو عدد فرد متوالی دلخواه باشند می‌توان نوشت:

$$(۲k+۱)(۲k+۳) + ۱ = ۴k^۲ + ۸k + ۴ = ۴(k^۲ + ۲k + ۱) = ۴(k+۱)^۲$$

بنابراین می‌توان حکم را نتیجه گرفت.

۶

الف نادرست

$$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in Q^C$$
$$\sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰ \notin Q^C$$

ب درست

$$(۲k+۱)^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k(k+۱) = ۴ \times ۲q = ۸q$$

۷ روزهای هفته دورهٔ گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر $a \overset{۷}{\equiv} b$ آن‌گاه a–امین و b–امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر x–امین و ۷ اسفند y–امین روز سال باشند داریم:

$$x = ۶ \times ۳۱ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$y = ۶ \times ۳۱ + ۵ \times ۳۰ + ۷ \overset{۷}{\equiv} ۷$$

بنابراین x–امین روز سال مانند ۵–امین روز سال و y–امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون x–امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال سه‌شنبه می‌باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه‌شنبه است.

۸

$$۷x + ۵y = ۱۱ \to ۷x \overset{۵}{\equiv} ۱۱ \overset{۵}{\equiv} ۱۱ + ۱۰ \overset{۵}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{(۷,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \to x = ۵k + ۳$$

$$۷(۵k+۳) + ۵y = ۱۱ \to ۵y = ۱۱ - ۷ \times ۵k - ۲۱ \to ۵y = -۱۰ - ۷ \times ۵k \to y = -۲ - ۷k$$

بنابراین تمام جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $۷x + ۵y = ۱۱$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} x = ۵k + ۳ \\ y = -۲ - ۷k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۹

$$\left.\begin{array}{l} a|۵k+۳ \to a|۹(۵k+۳) \\ a|۹k+۴ \to a|۵(۹k+۴) \end{array}\right\} \longrightarrow a|۹(۵k+۳) - ۵(۹k+۴) \longrightarrow a|۷$$

در نتیجه با توجه به اینکه $a > ۱$، a برابر ۷ می‌باشد که عددی اول است.

۱۰

$a|b \longrightarrow b=aq\,,\ q\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow b=(-a)(-q)\longrightarrow -a|b$

$\Rightarrow -b=(-a)q=a(-q)\longrightarrow -a|-b\,,\ a|-b$

۱۱ چون $(a\,,c)=۱$ و $(a\,,bc)=(a\,,b)$ و چون $(a\,,b)=۱$ سپس $(a\,,bc)=۱$.

۱۲ می‌توان نوشت:

$$۱۷ \overset{۲۵}{\equiv} ۱۷-۲۵ \overset{۲۵}{\equiv} -۸ \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۳} \to ۱۷^{۱۹} \overset{۲۵}{\equiv} (-۲^{۳})^{۱۹} \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۵۷}$$

حال با محاسبهٔ توان‌های ۲ بر هم‌نهشتی $۲^{۱۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱۰۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} -۴۱\times ۲۵+۱۰۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} -۱$ می‌رسیم، پس داریم:

$$(۲^{۱۰})^{۵} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)^{۵} \to ۲^{۵۰} \overset{۲۵}{\equiv} -۱ \to ۲^{۵۰}\times ۲^{۷} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)\times(۲^{۷})$$

$$۲^{۵۷} \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۷} \overset{۲۵}{\equiv} -۱۲۸ \overset{۲۵}{\equiv} -۱۲۸+۵\times ۲۵ \overset{۲۵}{\equiv} -۳$$

بنابراین داریم:

$$۱۷^{۱۹} \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۵۷} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)(-۳) \overset{۲۵}{\equiv} ۳$$

۱۳ عدد صحیح و دلخواه a در تقسیم بر ۵ به یکی از ۵ صورت $۵k\,,\ ۵k\pm ۱\,,\ ۵k\pm ۲$ است. حال کافی است هریک از صورت‌های فوق را به توان ۲ برسانیم تا باقیمانده‌های ممکن مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۵ بدست آید:

$a=۵k\to a^{۲}=۵k'$

$a=۵k\pm ۱\to a^{۲}=۵k'+۱$

$a=۵k\pm ۲\to a^{۲}=۵k'+۴$

پس مربع هر عدد صحیح درتقسیم بر ۵ تنها می‌تواند باقیمانده‌های ۰ و ۱ و ۴ را بسازد.

۱۴ می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۱\mid ۱۱a-۱۱b \\ ۱۱\mid ۲(۲a-۳b)\to ۱۱\mid ۴a-۶b \end{array}\right\}\to ۱۱\mid (۱۱a-۱۱b)-(۴a-۶b)\to ۱۱\mid ۷a-۵b$$

۱۵

$$\left.\begin{array}{l} a=۱۷q+۵ \\ b=۱۷q'+۳ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲a-۵b=۱۷\times ۲q+۱۰-۱۷\times ۵q'-۱۵=۱۷(۱۲q-۵q'-۱)+۱۲=۱۷k+۱۲\Rightarrow r=۱۲$$

۱۶

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲\Leftrightarrow \frac{x^{۲}+y^{۲}}{xy}\geq ۲\Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}\geq ۲xy\Leftrightarrow (x-y)^{۲}\geq ۰$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است.

۱۷ معادله سیاله دارای جواب است زیرا $(۹,۱۳)=۱|۷$

$$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷,\ (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴,\ ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶)\to ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴\to y=۹k+۴$$

در نتیجه با جایگذاری $y=۹k+۴$ در معادلهٔ سیاله $۹x+۱۳y=۷$ داریم:

$x=-۱۳k-۵$

۱۸

الف نادرست

$n=۴\Rightarrow ۲^{۴}-۱=۱۵\notin P$

ب درست

پ نادرست

۱۹

۱۲ بهمن سه‌شنبه است $\Rightarrow ۲۹+۳۰+۳۰+۱۲ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow$ شنبه = اول مهر

الف

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \xrightarrow{\div ۴} ۲x \overset{\frac{۱۲}{۴}}{\equiv} ۵\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۵\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۲\Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱\Rightarrow x=۳k+۱$$

۲۰

الف گنگ

ب $a|mb$

پ $|a|$

ت $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$