نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: گسسته فصل دوم تستی

تاریخ آزمون:

۱) چند نوع گراف ساده از مرتبه ۵ و اندازه ۸ وجود دارد؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

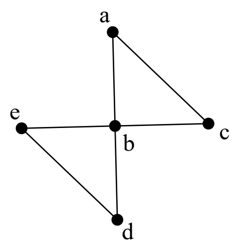
۲) در یک گراف ساده اگر $p = ۶$ و $q = ۱۳$ باشد، حداکثر مقدار برای δ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۳) حداکثر تعداد یال‌های یک گراف مرتبهٔ ۸ کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۳۲   ۳) ۲۴   ۴) ۲۸

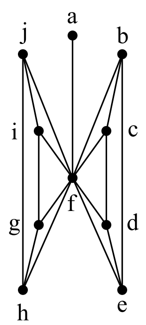
۴) گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟



۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۵   ۴) ۶

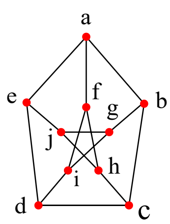
۵) با توجه به گراف مقابل، کدام گزینه مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال محسوب می‌شود؟



۱) $\{i, c, e, h\}$ ۲) $\{d, j, b, a\}$

۳) $\{a, c, d, g, i\}$ ۴) $\{h, f, i, j\}$

۶) کدام مجموعهٔ زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف زیر نیست؟



۱) $\{f\,,\,g\,,\,h\,,\,i\,,\,j\}$ ۲) $\{f\,,\,g\,,\,h\,,\,e\}$

۳) $\{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\}$ ۴) $\{a\,,\,i\,,\,h\}$

۷) گراف $G(V,E)$ که در آن $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_۷\}$ و $E = \{v_۱v_۲, v_۴v_۵, v_۳v_۴, v_۲v_۶\}$ است. از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۸) اگر y بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی باشد که در معادلهٔ سیاله خطی $۱۵x + ۲۱y = ۹$ صدق کند، مقدار قرینه x کدام است؟

۱) ۱۳۹۸   ۲) ۱۳۹۹   ۳) ۱۳۹۱   ۴) ۱۳۹۰

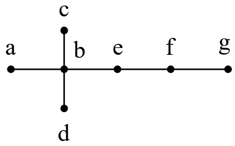
۹) در گرافی از مرتبهٔ ۹، $\Delta - \delta = ۳$ است. تفاوت حداکثر و حداقل تعداد یال‌ها کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۲۰   ۳) ۳۰   ۴) ۴۰

۱۰) با شش رأس a، b، c، d، e و f چند گراف ساده می‌توان ساخت که در هریک از آن گراف‌ها دقیقاً سه رأس تنها موجود باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۱۱) گراف شکل مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



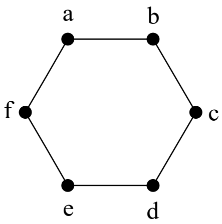
۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۱۲) حداقل چند یال به گراف C_5 اضافه کنیم تا مقدار γ برابر ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G در شکل مقابل نیست؟



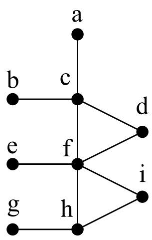
۱) $A = \{a, d\}$ ۲) $B = \{b, f, d\}$

۳) $C = \{b, c, f\}$ ۴) $D = \{d, e, f\}$

۱۴) اگر G گرافی $r-$ منتظم از مرتبه p و اندازه q باشد، آنگاه کدام حکم همواره درست است؟

۱) $q < \frac{p^2}{2}$ ۲) $q > \frac{p^2}{2}$ ۳) $q < \frac{p^3}{3}$ ۴) $q > \frac{p^3}{3}$

۱۵) با افزودن کدام یال به گراف G در شکل مقابل، عدد احاطه گری آن تغییر می‌کند؟



۱) ab ۲) di

۳) fg ۴) fb

۱۶) یک گراف از مرتبه ۹ و اندازه ۳۵ دارای چند رأس از درجهٔ Δ است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۷) در گراف ساده و همبند G از مرتبه p و اندازه q، اگر $p + q = 10$ باشد، آنگاه برای p و q چند جواب وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۸) اگر در گراف ساده از مرتبه ۷ اندازه برابر ۱۷ باشد، این گراف حداکثر چند رأس از درجهٔ ۶ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۰

۱۹) در گراف K_7 چند دور متمایز به طول ۳ شامل رأس a وجود دارد؟

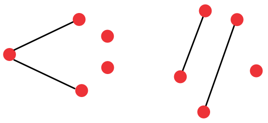
۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۳۵

۲۰) گراف C_8 چند مجموعهٔ احاطه‌گر ۶ عضوی دارد؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

پاسخنامه تشریحی

۱ ۴ ۳ ۲ **[۱]** چون رسم گراف از مرتبهٔ ۵ با اندازهٔ ۸ سخت است از مفهوم مکمل آن استفاده می‌کنیم. گراف $K_۵$ دارای ۱۰ یال است پس مکمل این گراف ۲ یال دارد. تعداد گراف‌های از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۲ با تعداد گراف‌های از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۸ برابر است. دو یال در گراف مکمل یا به هم متصل هستند یا نیستند، پس دو گراف می‌توان رسم کرد. چون مکمل این گراف ۲ حالت دارد پس دو گراف مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۸ می‌توان رسم کرد.



۲ **[۴]** ۳ ۲ ۱ روش اول: در گراف $K_۶$ به تعدادِ $۱۵ = \frac{۶ \times ۵}{۳}$ یال داریم. یعنی باید $۲ = ۱۳ - ۱۵$ یال از $K_۶$ برداریم تا به گراف موردنظر برسیم. برای اینکه حداکثر مقدار برای δ را می‌خواهیم باید این دو یال را از دو رأس مختلف برداریم (که کمترین مقدارِ ممکن درجهٔ رأس را کم کند). در گراف $K_۶$ درجهٔ هر رأس $۵ = ۱ - ۶$ است. وقتی یک یال از یک رأس برداشته شود (یعنی ۲ تا یک یال از دو جای مختلف برمی‌داریم و از هر رأسی تنها یک یال کم می‌شود) δ برابر با $۴ = ۱ - ۵$ می‌شود.

روش دوم: می‌توانیم از فرمول $\delta \leq \frac{۲q}{p}$ استفاده کنیم. درنتیجه داریم:

$$\delta \leq \frac{۲ \times ۱۳}{۶} \Rightarrow \delta_{\max} = ۴$$

اثبات نامساوی بالا: فرض کنیم درجهٔ هر رأس گراف برابر k باشد، در این صورت داریم:

$$\delta \leq k \Rightarrow \delta p \leq kp = ۲q \Rightarrow \delta \leq \frac{۲q}{p}$$

۳ **[۴]** ۳ ۲ ۱ حداکثر تعداد یال‌ها وقتی است که گراف کامل باشد، پس در گراف کامل مرتبه ۸ خواهیم داشت.

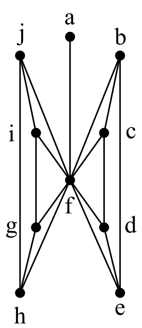
$$q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow q = \frac{۸ \times ۷}{۲} = ۲۸$$

۴ ۴ **[۳]** ۲ ۱ به یک مجموعه شامل رئوس که هر رأس از گراف یا خودش در آن مجموعه باشد یا با یکی از اعضای آن مجموعه مجاور باشد مجموعه احاطه‌گر می‌گوییم. به یک مجموعهٔ احاطه‌گر که با حذف هریک از اعضای آن، مجموعهٔ دیگر احاطه‌گر نباشد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌گوییم.

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال در گراف داده‌شده به این صورت هستند:

$$\{b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}$$

۵ ۴ **[۳]** ۲ ۱



بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: احاطه‌گر نیست زیرا رأس a احاطه نشده است.

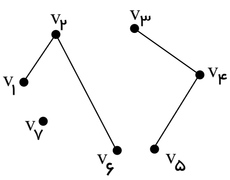
گزینهٔ «۲»: احاطه‌گر نیست زیرا رأس g احاطه نشده است.

گزینهٔ «۳»: احاطه‌گر مینیمال است.

گزینهٔ «۴»: احاطه‌گر است اما احاطه‌گر مینیمال نیست، چون رأس f به تنهایی قادر به احاطهٔ تمام رئوس گراف است و می‌توان رئوس h، i و j را از این مجموعه حذف کرد.

۶ ۴ ۳ **[۲]** ۱ در گزینهٔ ۲ اگر رأس f را حذف کنیم، مجموعهٔ باقی‌مانده احاطه‌گر است، پس نمی‌تواند مینیمال باشد ولی در سایر گزینه‌ها اگر هریک از رأس‌های مجموعه را حذف کنیم، مجموعهٔ به‌دست‌آمده دیگر احاطه‌گر نخواهد بود، پس مینیمال هستند.

۷ ۴ **[۳]** ۲ ۱ گراف را رسم می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، گراف شامل ۳ «بخش جدا از هم» است.



۸ ۴ ۳ ۲ **[۱]**

$$۱۵x + ۲۱y = ۹ \xrightarrow{\div ۳} ۵x + ۷y = ۳ \Rightarrow ۷y \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۲y \overset{۵}{\equiv} -۲ \xrightarrow[(۲,۵)=۱]{\div ۲} y \overset{۵}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۵k - ۱ (k \in Z)$$

$$۵x + ۷(۵k - ۱) = ۳ \Rightarrow ۵x = -۳۵k + ۱۰ \Rightarrow x = -۷k + ۲$$

بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی ممکن برای y، برابر ۹۹۹ است. در این صورت داریم:

$۵k - ۱ = ۹۹۹ \Rightarrow ۵k = ۱۰۰۰ \Rightarrow k = ۲۰۰$

$x = -۷ \times ۲۰۰ + ۲ = -۱۳۹۸ \Rightarrow -x = ۱۳۹۸$

۹ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا فرض می‌کنیم دو سؤال جدا داریم. سؤال اول اینکه: «حداکثر یال‌های گرافی از مرتبهٔ ۹ که $\Delta - \delta = ۳$ است، چند تا است؟» در اینجا برای حداکثر شدن تعداد یال‌ها، تا جایی که می‌توانیم Δ را بزرگ در نظر می‌گیریم. با توجه به مرتبهٔ گراف، یعنی ۹، Δ حداکثر می‌تواند ۸ باشد، اگر $\Delta = ۸$ باشد، δ باید ۵ باشد. حالا باید حداکثر یال‌های گرافی را حساب کنیم که در آن $\delta = ۵$ و $\Delta = ۸$ است. حداکثر یال‌ها را می‌توانیم به‌راحتی حساب کنیم. چون Δ یک واحد از مرتبهٔ گراف کوچک‌تر است، یک رأس شرط‌دار با درجهٔ ۵ را کنار می‌گذاریم. با بقیهٔ رئوس یک گراف کامل می‌سازیم و درنهایت تعداد یال‌های رأس شرط‌دار را به آن اضافه می‌کنیم. داریم:

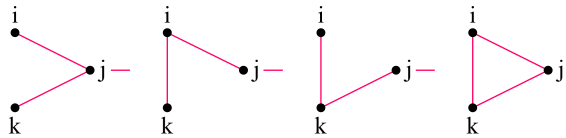
$$q_{max} = \frac{۸(۸-۱)}{۲} + ۵ = ۳۳$$

حال می‌رویم سراغ سؤال دوم: «حداقل یال‌های یک گراف از مرتبهٔ ۹ که در آن $\Delta - \delta = ۳$ باشد، چند تا است؟» گرافی را فرض کنید با ۹ رأس که $\Delta = ۳$ و $\delta = ۰$ است و تنها یک رأس آن از درجهٔ Δ باشد. به‌طور خلاصه گرافی با ۹ رأس و ۳ یال. پس داریم:

$$q_{max} - q_{min} = ۳۳ - ۳ = ۳۰$$

۱۰ ۴ ۳ ۲ **۱** – سه رأس از شش رأس را برای تنها بودن انتخاب می‌کنیم.

– با سه رأس باقی‌مانده گراف‌هایی می‌سازیم که رأس تنها نداشته باشند که به چهار طریق زیر ممکن است:

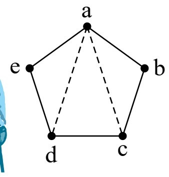


$$\text{تعداد گراف‌ها} = \binom{۶}{۳} \times ۴ = ۸۰$$

۱۱ ۴ **۳** ۲ ۱ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف عبارت‌اند از:

$\{b, f\}, \{b, g\}, \{a, c, d, f\}\{a, c, d, e, g\}$

۱۲ ۴ ۳ **۲** ۱ موقعی γ برابر ۱ می‌شود که Δ برابر ۴ باشد، پس باید حداقل دو یال اضافه کنیم. (یال‌های ac و ad در شکل)



۱۳ **۴** ۳ ۲ ۱

نکته: مجموعهٔ D زیر مجموعهٔ رئوس گراف G را یک مجموعهٔ احاطه‌گر نامند، هرگاه هر رأس گراف G، یا در D باشند یا با حداقل یکی از عضوهای مجموعهٔ D مجاور باشند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱ : احاطه‌گر است.

گزینهٔ ۲ : احاطه‌گر است.

گزینهٔ ۳ : احاطه‌گر است.

گزینهٔ ۴ : احاطه‌گر نیست رأس b توسط هیچ رأسی احاطه نمی‌شود.

۱۴ ۴ ۳ ۲ **۱** در هر گراف r ـ منتظم، رابطهٔ $rp = ۲q$ با شرط $r < p$ برقرار است، پس داریم:

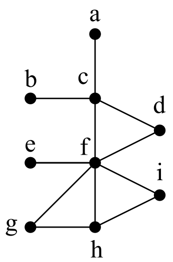
$$r < p \xrightarrow{\times p} rp < p^۲ \Rightarrow ۲q < p^۲ \Rightarrow q < \frac{p^۲}{۲}$$

۱۵ ۴ **۳** ۲ ۱

نکته: تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری نامیده و با γ – مجموعه نمایش می‌دهیم.

در این گراف مجموعهٔ $\{c, f, h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌باشد از طرفی اگر یال‌های ab، di یا fb را به آن اضافه کنیم بازهم مجموعهٔ فوق احاطه‌گر بوده و عدد احاطه‌گری بازهم برابر ۳ است.

اما اگر یال fg را به این گراف اضافه کنیم مجموعهٔ $\{c, f\}$ می‌تواند تمام رئوس را احاطه کند یعنی عدد احاطه‌گری عدد ۲ خواهد بود.



۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱ در گراف کامل $K_۹$ داریم:

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$$

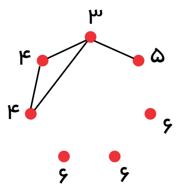
اگر از $K_۹$ یک یال حذف کنیم، گراف موردنظر به دست می‌آید اما در $K_۹$، ۹ رأس دارای درجهٔ Δ هستند و با حذف یک یال، از درجهٔ ۲ رأس کاسته می‌شود، پس ۷ رأس از درجهٔ Δ باقی

می‌ماند.

۱۷ (۴) (۳) (۲) (۱) در گراف‌های مرتبه ۳،۲،۱، حداکثر مجموع مرتبه و اندازه به‌ترتیب ۶،۳،۱ است.

$$p+q=۱۰ \xrightarrow{p\geq ۴} \begin{cases} p=۴ & ,\ q=۶ \\ p=۵ & ,\ q=۵ \\ p=۶ & ,\ q=۴\text{(غ ق ق }\leftarrow\text{ناهمبند)} \end{cases}$$

۱۸ (۴) (۳) (۲) (۱) مرتبهٔ گراف ۷ و اندازهٔ آن ۱۷ است، بنابراین در صورتی که از گراف $K_۷$ که $\binom{۷}{۲}=۲۱$ یال دارد، ۴ یال حذف شود به این گراف می‌رسیم.



چون گفته شده حداکثر چند رأس از درجه ۶ دارد، باید سعی کنیم ۴ یال را از رئوس کمتری حذف کنیم. پس حداقل ۴ رأس لازم است و ۳ رأس همچنان از درجهٔ ۶ باقی می‌مانند.

۱۹ (۴) (۳) (۲) (۱) برای ساختن یک دور به طول ۳ به ۳ رأس از یک گراف نیاز داریم. یکی از رأس‌ها که a است. دو رأس دیگر را باید از ۶ رأس باقی‌مانده انتخاب کنیم:

دقت کنید که به‌ازای هر ۳ رأس دلخواه از گراف $K_۷$، دقیقاً یک دور به طول ۳ وجود دارد.

$$\binom{۶}{۲}=۱۵$$

۲۰ (۴) (۳) (۲) (۱) با توجه به اینکه گراف $C_۸$، ۲− منتظم از مرتبهٔ ۸ است، با انتخاب هر ۶ رأس از ۸ رأس گراف، همهٔ رئوس آن احاطه می‌شوند، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۶ عضوی گراف C_n برابر است با:

$$\binom{۸}{۶}=\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$$

پاسخنامه کلیدی

۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	۲	**۳**	۴
۶	۱	**۲**	۳	۴
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	**۱**	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	**۴**
۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۶	۱	۲	**۳**	۴
۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۲۰	۱	**۲**	۳	۴