



زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

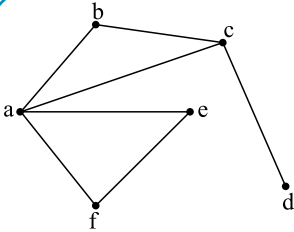
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: گسسته فصل دوم تشریحی

تاریخ آزمون:



۱ عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



۲ گراف G ، $3-$ منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

۳ گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

۴ در گراف G از مرتبه $p = 8$ ، تعداد عضوهای همسایگی باز رأس‌های گراف عبارتند از: ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۳، ۴، ۵. مکمل این گراف چند یال دارد؟

۵ آیا گرافی ساده و $10-$ منتظم با ۳۵ یال وجود دارد؟

۶ با ۷ رأس a, b, c, d, e, f, g چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که همسایگی باز رأس a حداقل ۴ عضو داشته باشد؟

۷ در جاهای خالی، عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد.

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.

پ) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت، $\Delta(G)$ برابر است.

۸ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۹ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که:

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد؟

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد؟

۱۰ یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجه هر رأس را بیابید.

۱۱ در گراف G مجموعه $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ مجموعه رأس‌ها می‌باشد. اگر مجموعه همسایگی‌های رأس‌ها به صورت زیر باشد:

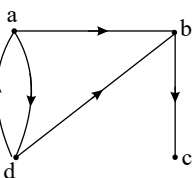
$$N_G(a) = \{b\}, \quad N_G(b) = \{a, c\}, \quad N_G(c) = \{b, e, d\}$$

$$N_G(d) = \{e, c\}, \quad N_G(e) = \{c, d\}, \quad N_G(f) = \emptyset$$

گراف G را رسم کنید.

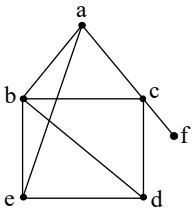
آیا رأس‌های e, b مجاورند؟ آیا یال‌های bc, cd مجاورند؟

۱۲ مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف مقابل را بنویسید.

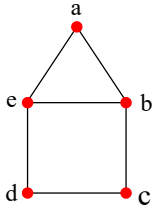




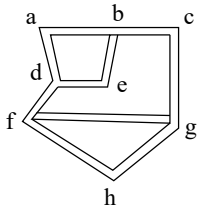
۱۳) گراف $G = (V, E)$ به صورت مقابل رسم شده است. مجموعه‌های V و E را مشخص کنید. درجه رأس‌ها و بیشترین و کمترین درجه رأس‌ها را بنویسید. مجموعه همسایگی باز رأس‌ها را بنویسید.



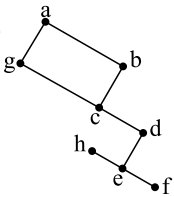
۱۴) تمام مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم را برای گراف زیر بنویسید.



۱۵) شکل مقابل، منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی از تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که اولاً: برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شوند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند. ثانیاً: به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد. خودپردازها را در کدام تقاطع‌ها قرار دهیم؟

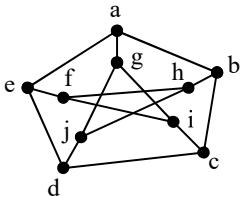


۱۶) عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

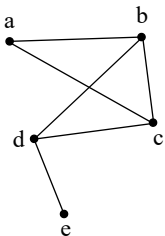


۱۷) گراف P_8 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.

۱۸) عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



۱۹) گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\gamma(G)$ را مشخص کنید.

ب) اندازه گراف را تعیین کنید.

پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.

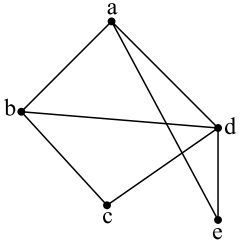
ت) اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، کدام رأس است x ؟

۲۰) به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید.



الف) گراف C_5 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.





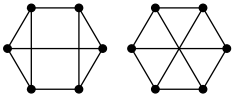
پاسخنامه تشریحی

۱) روش اول می‌دانیم $\gamma(G) \leq \frac{n}{\Delta + 1}$ پس داریم $\gamma(G) \leq \frac{6}{5}$ ؛ بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) = 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$

روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می‌شود. پس عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$ اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می‌کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد، لذا $\gamma(G) > 1$ بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ ؛ در نتیجه $\gamma(G) = 2$.

۲)

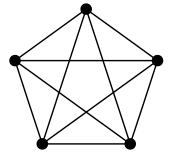
$$q = 2p - 3 \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow p = 6$$



به یکی از دو گراف زیر داده می‌شود.

۳)

$$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Rightarrow (p-5)(p+4) = 0 \Rightarrow p = 5$$



۴)

$$\deg v_1 = 5, \deg v_2 = 4, \dots, \deg v_8 = 2$$

$$\sum_{i=1}^8 \deg v_i = 2q \rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + q(\bar{G}) = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 16$$

۵)

$$rp = 2q \Rightarrow 10p = 20 \Rightarrow p = 2$$

گرافی با ۷ رأس نمی‌تواند ۱۰-منتظم باشد.

۶) رأس a را کنار می‌گذاریم. با بقیه رأس‌ها، $2^{\binom{6}{2}} = 2^{15}$ گراف می‌توان ساخت. درجه رأس a بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است، پس:

$$\deg a = 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \rightarrow \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$$

طبق اصل ضرب، تعداد گراف‌ها برابر است با:

$$22 \times 2^{15} = 11 \times 2 \times 2^{15} = 11 \times 2^{16}$$

۷)

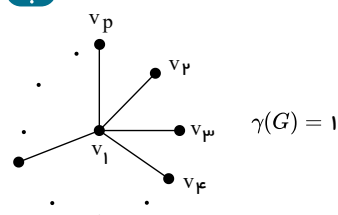
الف

$$\text{تعداد یال‌های گراف کامل ۸ رأسی: } \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

ب) ۳ رأس

شکل زیر را در نظر بگیرید:

ب



$$\Delta(G) = p - 1$$

رأس v_1 ماکزیم درجه است، بنابراین:

۸) فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:



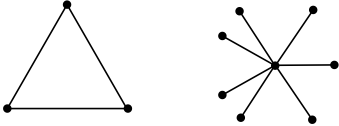
$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است، یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است. بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد.

بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می‌شود که $n(A)$ عددی زوج است.

۹ الف) کافی است گراف را به صورت یک زیرگراف ستاره‌ای و یک رأس تنها در نظر بگیریم. در این صورت، رأس وسط گراف ستاره‌ای و رأس تنها مجموعه‌ی احاطه‌گر را تشکیل می‌دهند.

ب) اگر گراف را به صورت مقابل در نظر بگیریم که شامل یک مثلث و یک گراف ستاره‌ای است، هر رأس گراف مثلث با رأس وسط گراف ستاره‌ای تشکیل یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۲ عضوی می‌دهند که این مجموعه یکتا نیست.



۱۰

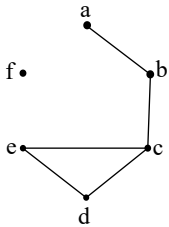
$$q = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 55 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p(p-1) = 110 = 11 \times 10 \Rightarrow p = 11$$

گراف کامل مرتبه ۱۱ است، پس $10 = (11 - 1)$ منتظم است، یعنی درجه هر رأس ۱۰ است.

۱۱

رأس‌های e, b مجاور نیستند، زیرا بین این دو رأس یالی وجود ندارد.

دو یال bc و cd مجاورند، زیرا هر دوی آنها به رأس c متصل هستند.



۱۲

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{ad, da, ab, db, bc\}$$

۱۳

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, ac, ae, bc, be, bd, cd, cf, de\}$$

$$\deg a = 3$$

$$\deg b = 4$$

$$\deg c = 4 \quad \Delta = 4, \delta = 1$$

$$\deg d = 3$$

$$\deg e = 3$$

$$\deg f = 1$$

$$N_G(a) = \{b, c, e\}, \quad N_G(b) = \{a, c, d, e\}$$

$$N_G(c) = \{a, b, d, f\}, \quad N_G(d) = \{b, c, e\}$$

$$N_G(e) = \{a, b, d\}, \quad N_G(f) = \{c\}$$

۱۴ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم برای این گراف ۲ عضو دارند. یعنی:

$$\gamma(G) = 2$$

اگر رأس a را ملاک قرار دهیم، این رأس با هر رأس دیگر به جز e و b یک مجموعه‌ی احاطه‌گر با ۲ عضو می‌سازد.

$$\{a, e\}, \{a, d\} \rightarrow \text{حالت ۲}$$

اگر رأس e را ملاک قرار دهیم:

$$\{e, c\}, \{e, d\}, \{e, b\} \rightarrow \text{حالت ۳}$$

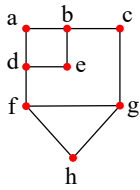
اگر رأس b را ملاک قرار دهیم:

$$\{b, d\}, \{b, c\} \rightarrow \text{حالت ۲}$$

$$\underline{2 + 3 + 3 = 8}$$

۱۵

گراف معادل این منطقه این گونه است:



اگر خودپردازها را در رئوس f, b نصب کنیم به هدف رسیده‌ایم. توجه شود که مجموعه $A = \{b, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

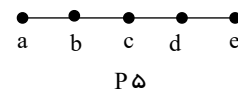
۱۶

برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d, e, g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند، زیرا $\left\lfloor \frac{5}{3+1} \right\rfloor = 2$.

برای احاطه کردن رئوس e, f, h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند، زیرا $\left\lfloor \frac{3}{3+1} \right\rfloor = 1$. بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه‌گری از گراف باشد، یعنی $\gamma(G) \geq 3$. از طرفی مجموعه $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$.

۱۷

شکل زیر را در نظر بگیرید:



$abcd, bcde$

۱۸

برای گراف مورد سؤال داریم: $\gamma(G) = 3 \leq \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 3 \Rightarrow \gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$. از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$.

۱۹

الف

گراف G فاقد رأسی است که با تمام رأس‌های دیگر مجاور باشد. از طرفی مجموعه $\{b, e\}$ قادر به احاطه تمام رأس‌های گراف است، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است.

ب

تعداد یال‌های گراف همان اندازه گراف است؛ داریم:

$q = 6$

پ

$N_G(b) = \{b, a, c, d\}$

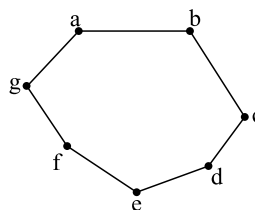
ت

$N_G(d) = \{b, c, e\}$
 $N_G(d) = \{e, x, b\}$: فرض سؤال $\Rightarrow x = v$

۲۰

الف

مسیر: $abcdef$



ب

$N_G(c) = \{b, d\}$