



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: گسسته فصل سوم تستی

تاریخ آزمون:

۱ با ارقام (۰, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸) چند عدد ۴ رقمی فرد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۱) ۴۸ ۲) ۶۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۲ با ارقام ۱, ۲, ۳, ۰۰۰, ۹ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت به طوری که دقیقاً ۳ رقم آن فرد باشند؟ (تکرار مجاز است).

- ۱) $4^2 \times 5^3$ ۲) $2^4 \times 5^5$ ۳) $5^4 \times 2^5$ ۴) $5^2 \times 4^3$

۳ ۱۰ نفر به نام‌های a, b, \dots می‌خواهند در یک صف بایستند؛ به چند طریق a جلوتر از b قرار می‌گیرد؟

- ۱) $10!$ ۲) $9!$ ۳) $\frac{10!}{2}$ ۴) $2 \times 10!$

۴ در مربع لاتین مقابل، مقدار x کدام است؟

			۴
		۱	
۲	۱		
	۲	x	

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ تعداد جواب‌های طبیعی نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$ کدام است؟

- ۱) ۳۵ ۲) ۵۶ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

۶ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت به طوری که فاقد رقم یک باشد و تمام ارقام آن یا فقط مربع کامل یا فقط مکعب کامل باشند؟ (تکرار ارقام مجاز است).

- ۱) ۴ ۲) ۲۷ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۷ سه ماشین A, B و C با هم مسابقه می‌دهند. چند حالت برای رسیدن به خط پایان وجود دارد در صورتی که امکان هم‌زمان رسیدن حداکثر دو ماشین هم به خط پایان وجود داشته باشد؟

- ۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۶

۸ مربع مقابل مربعی لاتین است. عددی که در خانه رنگی قرار می‌گیرد کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

۱			
	۲		
		۳	

۹ مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل f و فاقد b دارد؟

- ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۱۰ در بین چند عدد طبیعی و دلخواه می‌توان ثابت کرد به طور یقین حداقل دو عدد مانند a و b یافت می‌شود به طوری که به پیمانه n همنهشت باشند؟

- ۱) n ۲) $n - 1$ ۳) $n + 1$ ۴) $2n - 1$



۱۱) در یک مهمانی مطمئن هستیم بین هر ۱۴ نفر حداقل ۲ مرد و بین هر ۱۲ نفر حداقل ۳ زن وجود دارد. در این مهمانی حداکثر چند نفر وجود دارد؟

- ۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۱۲) ۶ زوج (زن و شوهر) می‌خواهند در یک صف قرار بگیرند. در چند حالت همه آقایان کنار هم و همه خانم‌ها کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۱) $\frac{7!6!}{2!}$ ۲) $2!6!6!$ ۳) $2!7!6!$ ۴) $\frac{7!7!}{2!}$

۱۳) مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ مفروض است. حداقل تعداد اعضای مجموعه‌ی $A (A \subseteq S)$ چه قدر باشد، تا قطعاً دو عضو آن نسبت به هم اول باشند؟

- ۱) ۴۹ ۲) ۵۱ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۵۱

۱۴) ۵۰ عدد حقیقی به تصادف از بازه‌ی $(0, 7)$ انتخاب می‌کنیم حداقل جزء صحیح چه تعداد از این اعداد با هم برابرند؟

- ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵) از میان ۵ جفت جوراب متمایز به چند طریق می‌توان ۳ لنگه انتخاب کرد به طوری که هیچ جفتی نداشته باشیم؟

- ۱) ۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۶۰

۱۶) دور یک میز گرد ۳ صندلی به رنگ قرمز و ۳ صندلی به رنگ سفید به صورت یک در میان چیده شده است. شش نفر به چند طریق می‌توانند دور این میز گرد بنشینند؟

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۷) حداقل m عضو از اعضای $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ را باید حذف کنیم تا مطمئن شویم در بین اعداد باقی‌مانده تفاضل هیچ دو عددی برابر ۱۰ نیست. m کدام است؟

- ۱) عددی اول ۲) مربع کامل ۳) دارای عامل ۳ ۴) دارای عامل ۵

۱۸) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت به طوری که در هر یک از آن اعداد، رقم ۲ قبل از ۴ و رقم ۳ قبل از ۱ (نه لزوماً بلافاصله) قرار داشته باشند؟

- ۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۸

۱۹) یک زیرمجموعه حداقل چندعضوی به دلخواه از مجموعه اعداد طبیعی انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم که حداقل ۴ عضو از این زیرمجموعه دارای باقی‌مانده یکسان در تقسیم بر ۶ هستند؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۰) اگر مربع لاتین A تحت جایگشت $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$ به مربع لاتین B تبدیل شود، آنگاه حاصل $a + b + c$ کدام است؟

$$B = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & a & & b & \\ & & & & \\ c & & & & \end{matrix} \quad , \quad A = \begin{matrix} & 2 & & & \\ & & & & \\ 3 & & & 1 & \\ & & & & 3 \end{matrix}$$

- ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخنامه تشریحی

۱ چون عدد باید فرد باشد، در خانه یکان یا ۵ یا ۷ قرار می‌گیرد، پس دو حالت داریم. در خانه اول سمت چپ چون عدد باید از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید ۴ یا بیشتر از ۴ باشد که یکی از ارقام ۵ و ۷ را قبلاً انتخاب کردیم، پس ۳ حالت داریم یا ۸ یا ۴ یا یکی از ۵ و ۷ (۲ و صفر نمی‌تواند در خانه اول باشد). برای خانه دوم از سمت چپ، چون از ۶ تا رقم دو رقم استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای خانه سوم از سمت چپ به همین ترتیب ۳ رقم باقی می‌ماند.

$$\boxed{3432} = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$$

انتخاب r شیء از n شیء برابر است با: $\binom{n}{r}$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

ابتدا سه جایگاه که در آنها ارقام فرد بنشینند را انتخاب می‌کنیم:

و در آنها یکی از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ را می‌نویسیم:

پس در ۲ جایگاه باقی‌مانده یکی از ارقام ۲، ۴، ۶، ۸ را می‌نویسیم:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

$$5 \times 5 \times 5$$

$$4 \times 4$$

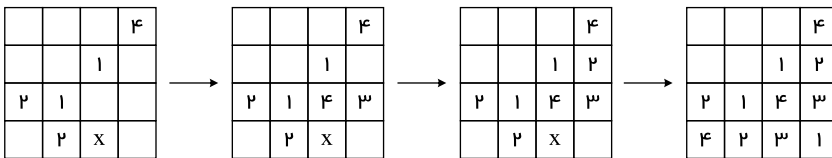
$$10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4 = 5 \times 2 \times 5^3 \times 2^2 = 5^4 \times 2^5$$

در مجموع طبق اصل ضرب داریم:

۳ ده نفر به ۱۰ حالت کنار هم می‌ایستند که در نصف آنها a جلوتر از b است، پس جواب به صورت $\frac{10!}{2}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

۴ ابتدا سطر سوم به صورت ۲ ۱ ۴ ۳ به صورت قطعی پر می‌شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

در مرحله بعد ستون چهارم به صورت ۴
۲
۳
۱ پر می‌شود و در مرحله آخر سطر چهارم به صورت ۴ ۲ ۳ ۱ باید پر شود که در نتیجه $x = 3$ می‌شود.



۵ روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

ابتدا با افزودن یک متغیر جدید (x_4) ، نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

دقت کنید که شرط طبیعی بودن جواب‌های معادله فقط مربوط به متغیرهای x_1, x_2, x_3 است. بنابراین داریم:

$$x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 = x'_4 - 1, x'_4 \geq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x'_4 - 1 = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 9$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{9-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

روش دوم:

نکته: تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ از دستور $\binom{n-1}{k-1}$ حاصل می‌شود.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \xrightarrow{x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1} \begin{cases} 1) x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow |S_1| = \binom{2}{2} \\ 2) x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow |S_2| = \binom{3}{2} \\ 3) x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow |S_3| = \binom{4}{2} \\ 4) x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow |S_4| = \binom{5}{2} \\ 5) x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow |S_5| = \binom{6}{2} \\ 6) x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow |S_6| = \binom{7}{2} \end{cases}$$



۱	۲	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۳	۴

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۳	۴
۱	۲	۴	۳
۳	۴	۱	۲

$$a + b + c = 1 + 4 + 3 = 8$$

با اعمال جایگشت داده شده، مربع لاتین B به صورت زیر به دست می آید:

در نتیجه $a = 1$ ، $b = 4$ و $c = 3$ است و داریم:

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴