نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: گسسته فصل سوم تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم، دست‌کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیرتکراری است؟

۲) مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \cdots, ۴۰۰\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند، به‌طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند؟

۳) تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۳ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)

۴) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی را به دست آورید.

۵) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰$ با شرط $x_i > ۰ \quad , \quad i = ۲, ۳, ۴, ۵$ را محاسبه کنید.

۶) مربع لاتین ۳×۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۷) آیا مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه، می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۸) چند عدد طبیعی کمتر از ۳۰۰، حداقل بر یکی از اعداد ۶ و ۸ بخش‌پذیر است؟

۹) در مربع لاتین زیر، حاصل $۳a - ۲b$ چند است؟

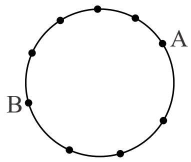
		۲	
۲		a	
	b		۱
	۱		

۱۰) سکه ای را به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم. چند حالت مختلف وجود دارد، برای اینکه سکه در پنجمین پرتاب، برای دومین بار پشت بیاید؟

۱۱) حاصل عبارت A چقدر است؟

$$A = \binom{۱۷}{۳} + \binom{۱۷}{۴} + \cdots + \binom{۱۷}{۸}$$

۱۲) به چند حالت می‌توان ۴ نقطه از بین نقاط زیر انتخاب کرد، به‌گونه‌ای که AB قطر ۴ضلعیِ ایجادشده باشد؟



۱۳) از بین ۸ جفت کفش مختلف به چند حالت می‌توان ۳ لنگه کفش انتخاب کرد که بین آنها هیچ جفتی وجود نداشته باشد؟

۱۴) ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به‌طوری که:

الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.

ب) هیچ‌یک از دو کتاب ریاضی کنارهم نباشند.

پ) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص، همواره کنار هم باشند.

۱۵) با ارقام ۹، ۷، ۶، ۵، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱ چند عدد ۹رقمی می‌توان نوشت؟

۱۶) کوتاه پاسخ دهید.

می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف) تعداد رمزهایی که هریک از آنها با یک حرف آغاز و با حرف دیگر خاتمه یابد.

ب) تعداد رمزهایی که در آنها، حروف کنار هم باشند.

۱۷) با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که:

الف) اعداد زوج کنارهم باشند.

ب) اعداد فرد کنارهم باشند.

۱۸) ۸ نفر را که برای یک برنامهٔ تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

۱۹) بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین ۳ × ۳ روبه رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲۰) ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به‌طوری که:

الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲ \quad , \quad k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲$$

$$\text{تعداد کبوترها} = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$$

۲ داریم:

$$A = \{n \in S | n = ۵k\, ,\, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left[\frac{۴۰۰}{۵}\right] = ۸۰$$

$$A = \{n \in S | n = ۷k\, ,\, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left[\frac{۴۰۰}{۷}\right] = ۵۷$$

$$A \cap B = \{n \in S | n = ۳۵k\, ,\, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{۴۰۰}{۳۵}\right] = ۱۱$$

در نتیجه:

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = ۴۰۰ - (۸۰ + ۵۷ - ۱۱) = ۲۷۴$$

۳

$$A = \{a_۱, a_۲, a_۳\} \quad , \quad b = \{b_۱, b_۲, \cdots, b_۶\}$$

$f(a_۱) = b_۱ \vee b_۲ \vee \cdots \vee b_۶ \Rightarrow$ به ۶ طریق $f(a_۱)$ را تعریف کنیم.

f یک‌به‌یک $\Rightarrow f(a_۲) \neq f(a_۱) \Rightarrow$ به ۵ طریق $f(a_۲)$ را تعریف کنیم. f یک‌به‌یک $\Rightarrow f(a_۳) \neq f(a_۱)\, ,\, f(a_۳) \neq f(a_۲) \Rightarrow$ به ۴ طریق $f(a_۳)$ را تعریف کنیم.

بنابراین طبق اصل ضرب $۱۲۰ = ۴ \times ۵ \times ۶$ تابع یک‌به‌یک داریم.

۴

$$۱ \leq j \leq ۳ \quad A_j = \{f : A \to B | f(a_i) \neq b_j \;\; ; ۱ \leq i \leq ۴\}$$

$$A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}\, ,\, B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$$

$$|S| = ۳^۴, |A_i| = ۲^۴, |A_i \cap A_j| = ۱^۴\, , |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |S| - (|A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۲ \cap A_۳|$$
$$-|A_۱ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|) = ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶$$

۵

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۳ + x_۵ = ۱۰ \to x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$$

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶ \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های معادله} = \binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۶ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

۶

الف) با توجه به اینکه

۲۲	۱۱	۳۳
۱۳	۳۲	۲۱
۳۱	۲۳	۱۲

درایهٔ تکراری ندارد، A و $A_۱$ متعامدند.

$A_۱ =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

ب) با توجه به اینکه

۱۲	۳۱	۲۳
۲۳	۱۲	۳۱
۳۱	۲۳	۱۲

درایهٔ تکراری دارد، A و $A_۲$ متعامد نیستند.

$A_۲ =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

پ) ۱- خیر ۲- خیر

۷) خیر، به‌عنوان مثال:

$A =$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$\xrightarrow[۳\to۲]{۱\to۳\ ,\ ۲\to۱}$

$A_۱ =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

با توجه به اینکه

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

اعداد دورقمی تکراری دارد، پس A و $A_۱$ متعامد نیستند.

۸)

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶:

$$|A| = \left[\frac{۲۹۹}{۶}\right] = ۴۹$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۸:

$$|B| = \left[\frac{۲۹۹}{۸}\right] = ۳۷$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ و ۸:

$$|A \cap B| = \left[\frac{۲۹۹}{۲۴}\right] = ۱۲$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۴۹ + ۳۷ - ۱۲ = ۷۴$$

۹) در سطر دوم امکان قرار گرفتن عدد ۱ در ستون‌های اول یا سوم وجود ندارد، پس a قطعاً برابر ۱ است. در ستون سوم امکان قرار گرفتن عدد ۲ در سطرهای اول و دوم وجود ندارد، پس b قطعاً برابر ۲ است و در نتیجه داریم: $۳a - ۲b = ۳(۱) - ۲(۲) = ۱$

۱۰) برای اینکه سکه در پنجمین پرتاب برای دومین بار پشت بیاید، باید در ۴ پرتاب اوّل یک بار پشت و ۳ بار رو بیاید.

تعداد حالات اینکه در ۴ پرتاب، یک بار پشت بیاید برابر است با:

$$\binom{۴}{۱} = ۴$$

۱۱) نکته: به‌ازای عبارات تعریف‌شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = \binom{۱۷}{۳} + \binom{۱۷}{۴} + \cdots + \binom{۱۷}{۸} = \binom{۱۷}{۱۴} + \binom{۱۷}{۱۳} + \cdots + \binom{۱۷}{۹}$$

نکته: می‌دانیم به‌ازای عبارات تعریف‌شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

پس به‌ازای $n = ۱۷$ داریم:

$$\binom{۱۷}{۰} + \binom{۱۷}{۱} + \binom{۱۷}{۲} + \underbrace{\binom{۱۷}{۳} + \cdots + \binom{۱۷}{۸}}_{A} + \underbrace{\binom{۱۷}{۹} + \cdots + \binom{۱۷}{۱۴}}_{A} + \binom{۱۷}{۱۵} + \binom{۱۷}{۱۶} + \binom{۱۷}{۱۷} = ۲^{۱۷}$$

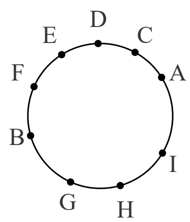
$$\binom{۱۷}{۰} = \binom{۱۷}{۱۷} = ۱ \quad , \quad \binom{۱۷}{۱} = \binom{۱۷}{۱۶} = ۱۷ \quad , \quad \binom{۱۷}{۲} = \binom{۱۷}{۱۵} = ۱۳۶$$

بنابراین:

$$۲A + ۲(۱ + ۱۷ + ۱۳۶) = ۲^{۱۷} \Rightarrow ۲A = ۲^{۱۷} - ۲ \times ۱۵۴ \Rightarrow A = ۲^{۱۶} - ۱۵۴$$

۱۲)

طبق شکل زیر باید یک نقطه از بین نقاط F, E, D, C انتخاب کنیم که برای این کار، ۴ انتخاب داریم و یک نقطه از بین نقاط I, H, G انتخاب کنیم که برای این کار، ۳ انتخاب داریم.



بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

۱۳) می خواهیم ۳ لنگه کفش انتخاب کنیم که هر کدام برای یک جفت کفش متفاوتی باشد. پس ابتدا ۳ جفت کفش انتخاب می‌کنیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر با $\binom{۸}{۳}$ است. سپس

از هر کدام از این ۳ جفت، یک لنگه انتخاب می‌کنیم که برای هر کدام ۲ حالت وجود دارد.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۸}{۳} \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۵۶ \times ۸ = ۴۴۸$$

۱۴

الف ۴ کتاب فیزیک را یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۵ کتاب مفروض ریاضی روی هم ۶ شیء بوده و !۶ جایگشت داشته و در هر یک از حالت‌ها ۴ کتاب فیزیک هم !۴ جایگشت دارند، لذا طبق اصل ضرب داریم: $۴! \times ۶!$

کتاب ریاضی: □

کتاب فیزیک: △

$۴! \times ۶!$: حالات مطلوب $\rightarrow$ △ △ △ $\underbrace{□ □ □ □}_{\text{کتاب فیزیک } ۴=۴!}$ △ △

ب کتاب ریاضی را با □ و کتاب فیزیک را با △ نشان می‌دهیم؛ مطابق شکل زیر برای اینکه هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند، باید کتاب‌های ریاضی و فیزیک را یک‌درمیان قرار دهیم:

□ △ □ △ □ △ □ △ □

!۵ : جایگشت کتاب‌های ریاضی

!۴ : جایگشت کتاب‌های فیزیک

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} ۵! \times ۴!$

پ یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص را یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۶ کتاب مفروض باقی‌مانده روی هم، ۷ شیء بوده و !۷ جایگشت داشته و در هریک از حالت‌ها، یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک هم !۳ جایگشت دارند؛ لذا طبق اصل ضرب داریم:

$۷! \times ۳!$

۱۵

$$\frac{۹!}{۳! \times ۲!}$$

۱۶ الف) شکل زیر را در نظر بگیرید (△: حروف و ○: ارقام)

△ ○ ○ ○ ○ ○ ○ △

$۶! \times ۲!$:جایگشت مطلوب

ب) شکل زیر را در نظر بگیرید، همهٔ حروف را در یک بسته قرار می‌دهیم؛ داریم:

$\boxed{△△}$ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$۲! \times ۷!$:جایگشت مطلوب

۱۷ الف) اعداد زوج را در یک بسته قرار می‌دهیم؛ داریم:

$۷, ۳, \boxed{۴, ۶, ۸}$

بنابراین تعداد جایگشت‌های اعداد ۵ رقمی موردنظر برابر است:

$۳! \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت عددهای زوج}}$

ب) اعداد فرد را در یک بسته قرار می‌دهیم؛ داریم:

$۶, ۸, \boxed{۷, ۳}, ۴$

بنابراین تعداد جایگشت‌های اعداد ۵ رقمی موردنظر برابر است:

$۴! \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت عددهای فرد}}$

۱۸ حل مسألهٔ معادل با یافتن تعداد تابع‌های موجود از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی است که برابر با $۸^۴$ است.

۱۹ متعامدند. زیرا در جدول ترکیب‌شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم.

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۲۰

الف

$۶! \times ۶!$

ب

$۶! \times ۵!$