نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۲۵ دقیقه

نام آزمون: حدو پیوستگی (تستی)

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱ با شرط $m>۴, n<۲$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n^۲x^{m-۳}+nx+m}{mx^{-n+۳}+mx-۳}=۳$ مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۶　　۳) ۹　　۴) ۱۸

۲ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x، بازهٔ $(x+۱, ۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$　　۲) $\{۲\}$　　۳) $۲<x<۲٫۵$　　۴) $۱٫۵<x<۲$

۳ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x-۱}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) ۱　　۴) ۲

۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}$ ، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to-۱} f(x)$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$　　۲) $-\frac{۱}{۸}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۳}$

۵ خارج قسمت تقسیم $f(x)=x^۸+۵x^۷+۳x-۲$ بر $x+۱$ را بر $x-۱$ تقسیم کرده‌ایم، باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۸　　۲) -۸　　۳) -۹　　۴) ۹

۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ;x\neq ۲\\ a & ;x=۲\end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است؟

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) $-\frac{۱}{۲}$　　۴) ۱

۷ اگر $f+g$ و $f-g$ هر دو در نقطه $x_۰$ پیوسته باشند، آنگاه کدام بیان درست است.

۱) الزاماً تابع fog در $x_۰$ پیوسته است.

۲) $f\cdot g$ ممکن است در $x_۰$ پیوسته نباشد.

۳) f یا g ممکن است در $x_۰$ پیوسته نباشند.

۴) الزاماً f و g هر دو در $x_۰$ پیوسته اند.

۸ چهارمین ناپیوستگی $y=[\frac{۱۵}{۲x+۱}]$ با طول مثبت، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) $\frac{۱۱}{۸}$　　۳) $\frac{۲}{۱۱}$　　۴) ۲

۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)=x^۳-x^۲+kx+۴$ بر عبارت $x-۲$ برابر صفر است، حاصل جمع صفرهای تابع p کدام است؟

۱) -۲　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۳

۱۰ اگر $\lim\limits_{x\to-۴} f(x)=-\infty$ ، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to-۴} \frac{x+۲}{f(x)}$ کدام است؟

۱) $+\infty$　　۲) $-\infty$　　۳) صفر　　۴) -۲

۱۱) در تابع جزءصحیح $f(x)=[\frac{x}{۵}]+[\frac{x}{۲}]$ وقتی $x\to ۱۰$ مجموع حد راست و حد چپ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۲ ۳) ۱۲ ۴) -۲

۱۲) حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{x+۲}{\sqrt{x+۲}}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۰

۱۳) تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax+b}{x+۳\sqrt{x}-۴}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۳$ باشد، آن‌گاه، $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۴) اگر بازهٔ $(-۲,۵)$ همسایگی راست نقطهٔ a، همسایگی چپ نقطه b و همسایگی متقارن نقطهٔ c باشد، حاصل $a^۲-۲b+c$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵) مقدار حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(x-۴)^۳}{(\sqrt{x}-۲)^۳}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۱۶) تابع
$$f(x):\begin{cases} bx-[x] & ۱\le x<۲\\ \dfrac{a\cos(\frac{\pi}{۲}(x))}{x^۲-۱} & -۱<x<۱\\ ۲x-b[-x] & -۲<x\le -۱\end{cases}$$
در بازهٔ $(-۲,۲)$ پیوسته است. حاصل $a\times b$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۶}{\pi}$ ۲) $-\frac{۶}{\pi}$ ۳) $\frac{۳}{\pi}$ ۴) $-\frac{۳}{\pi}$

۱۷) اگر تابع با ضابطه
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin x} & ; \ x>۰\\ a+۲[x] & ; \ x<۰\end{cases}$$
و $f(۰)=b$ در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد. $a+b$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}+۲$ ۴) $-۲+\sqrt{۲}$

۱۸) اگر $f(x)=\frac{۲x|x|-۵x^۲}{x^۲-۴}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}(fof)(x)$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۵ ۳) -۳ ۴) -۲

پاسخنامه تشریحی

۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)** چون جواب حد، عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند.

بزرگترین توان x صورت برابر $m-۳$ است $m>۴ \to m-۳>۱ \to$

بزرگترین توان x مخرج برابر $-n+۳$ است. $n<۲ \to -n>-۲ \to -n+۳>۱ \to$

بزرگترین توان x صورت $=$ بزرگترین توان x مخرج $\to m-۳=-n+۳ \to m+n=۶$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^۲\cdot x^{m-۳}}{m\cdot x^{-n+۳}}=\frac{n^۲}{m}=۳ \to n^۲=۳m \to m=\frac{n^۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{m+n=۶}\frac{n^۲}{۳}+n=۶ \to n^۲+۳n-۱۸=۰ \to (n+۶)(n-۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} n=-۶ \to m=۱۲ \to m-n=۱۸ \\ n=۳ \ \text{غ ق ق} \ (n<۲) \end{cases}$$

۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می‌شود که آن عدد درون بازه باشد.

پس:

$$x+۱<۳<۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۱<۳ \to x<۲ \\ ۲x-۱>۳ \to x>۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\tan^۲ x-۱}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin^۲ x-\cos^۲ x}{\cos^۲ x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{-۱}{\cos^۲ x}=\frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

توجه کنید $\tan\frac{۳\pi}{۴}=-۱$ می‌باشد.

۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\overbrace{|x|}^{+}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$ پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=-\frac{۱}{۲}\to a=-۶$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶x-۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۲+\frac{۱(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}}{-۶}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{-۶}=\frac{-۱}{۸}$$

۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴) خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ را $q(x)$ در نظر می‌گیریم و ابتدا باقی‌مانده $f(x)$ بر $x+۱$ را می‌یابیم.

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(-۱)=۱-۵-۳-۲=-۹$$

حال رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=x^۸+۵x^۷+۳x-۲=(x+۱)\,q(x)-۹ \quad (۱)$$

برای یافتن باقی‌مانده $q(x)$ بر $x-۱$ داریم:

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=q(۱)$$

$$x=۱\xrightarrow{(۱)}۱+۵+۳-۲=۲q(۱)-۹\Rightarrow ۲q(۱)-۹=۷\Rightarrow q(۱)=۸$$

$$\text{باقی‌مانده تقسیم}\ q(x)\ \text{بر}\ x-۱=q(۱)=۸$$

۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در   موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to۲}f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to۲}\frac{۱-\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

پس $f(۲)=a=-\frac{۱}{۲}$ است

۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)** چون $f+g$ و $f-g$ در $x_۰$ پیوسته هستند بنابراین مجموع و تفاضل آن‌ها نیز در $x_۰$ پیوسته است. یعنی:

$y=(f+g)+(f-g)=۲f$: در $x_۰$ پیوسته $\Rightarrow f$: در $x_۰$ پیوسته

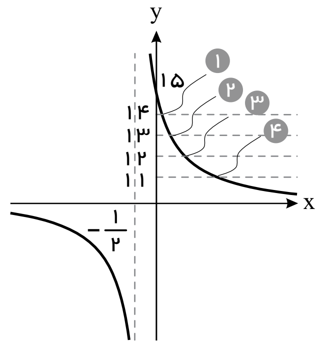
$y=(f+g)-(f-g)=۲g$: در $x_۰$ پیوسته $\Rightarrow g$: در $x_۰$ پیوسته

۸ ۱ ۲ **۳** ۴ تابع $f(x)=\dfrac{۱۵}{۲x+۱}$ روی $(۰\,,\,+\infty)$ اکیداً یکنواست؛ پس در هر نقطه که $\dfrac{۱۵}{۲x+۱}$ عددی صحیح است، تابع $[f]$ ناپیوسته است.

این نقاط محل تلاقی نمودار تابع f و خطوط $y=k$ است.

با توجه به شکل، چهارمین نقطهٔ ناپیوستگی، محل تلاقی نمودار f و خط $y=۱۱$ است:

$$\frac{۱۵}{۲x+۱}=۱۱\Rightarrow ۲x+۱=\frac{۱۵}{۱۱}\Rightarrow ۲x=\frac{۴}{۱۱}\Rightarrow x=\frac{۲}{۱۱}$$



توجه:

طول نقاط ناپیوستگی را می‌توان چنین به‌دست آورد:

$$\frac{۱۵}{۲x+۱}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x+۱=\frac{۱۵}{k}\Rightarrow ۲x=\frac{۱۵}{k}-۱\Rightarrow x=\frac{۱۵-k}{۲k}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

از آنجا که $x>۰$، باید $۰<k<۱۵$ باشد، به ازای $k=۱$ تا $k=۱۴$ داریم:

$$x=\underset{\underset{k=۱}{\uparrow}}{\frac{۱۴}{۲}}\,,\ \frac{۱۳}{۴}\,,\ \frac{۱۲}{۶}\,,\ \dots\,,\ \frac{۴}{۲۲}\,,\ \frac{۳}{۲۴}\,,\ \frac{۲}{۲۶}\,,\ \underset{\underset{k=۱۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{۲۸}}$$

پس چهارمین نقطهٔ ناپیوستگی $x=\dfrac{۲}{۱۱}$ است.

۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$p(x)=x^۳-x^۲+kx+۴\ \ ,\ \ x-۲=۰\Rightarrow x=۲$

$\text{باقی‌مانده}=p(۲)=۰\Rightarrow ۸-۴+۲k+۴=۰\Rightarrow k=-۴\Rightarrow p(x)=x^۳-x^۲-۴x+۴$

$p(x)=۰\Rightarrow x^۳-x^۲-۴x+۴=۰\Rightarrow x^۳-۴x-x^۲+۴=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)-(x^۲-۴)=۰$

$$\Rightarrow (x^۲-۴)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm۲\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

$\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها}=۲-۲+۱=۱$

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to-۴}(x+۲)=-۲$، داریم:

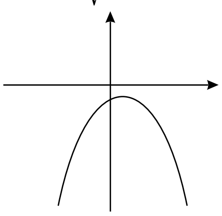
$$\lim_{x\to-۴}\frac{x+۲}{f(x)}=\frac{-۲}{-\infty}=۰$$

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱۰^+}f(x)=[\frac{۱۰^+}{۲}]+[\frac{۱۰^+}{۵}]=[۵^+]+[۲^+]=۵+۲=۷\\ \lim\limits_{x\to۱۰^-}f(x)=[\frac{۱۰^-}{۲}]+[\frac{۱۰^-}{۵}]=[۵^-]+[۲^-]=۴+۱=۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۷+۵=۱۲$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x+۲}{\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to(-۲)^+}\sqrt{x+۲}=۰$$



۱۳ ۱ ✓

اولین قدم در حل مسائل حدی، عددگذاری است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x+3\sqrt{x}-4}=\frac{1+a+b}{0}\xrightarrow[\text{از رفع ابهام جوابش ۳ شده است}]{\text{این کسر حتماً } \frac{0}{0} \text{ بوده که پس}} 1+a+b=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x+3\sqrt{x}-4}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{2x+a}{1+\frac{3}{2\sqrt{x}}}=\frac{2x+a}{1+\frac{3}{2}}=\frac{2+a}{\frac{5}{2}}=\frac{4+2a}{5}=3\to 4+2a=15\to 2a=11\to a=\frac{11}{2}=5/5\xrightarrow{1+a+b=0} b=-6/5$$

پس $a-b=5/5+6/5=12$ است.

۱۴ ۱ ✓ بازهٔ $(-2,5)$ همسایگی راست نقطهٔ -2 و همسایگی چپ نقطهٔ ۵ و همسایگی متقارن نقطهٔ $\frac{-2+5}{2}$ است. پس داریم:

$$a=-2, b=5, c=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow a^2-2b+c=4-10+\frac{3}{2}=-6+\frac{3}{2}=\frac{-12+3}{2}=-\frac{9}{2}$$

۱۵ ۳ ✓

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^3}{(\sqrt{x}-2)^3}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)^3=\lim_{x\to 4}\left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)}\right)^3$$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)^3=4^3=64$$

۱۶ ۴ ✓

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$x+1=t\Rightarrow x=t-1\Rightarrow \lim_{x\to -1^+}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1^t}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}(t-1))}{t(t-2)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2})}{t(t-2)}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t)}{t(t-2)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}a\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t(t-2)}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}a}{-2}\to\frac{\frac{\pi}{2}a}{-2}=-\frac{\pi}{4}a$$

اکنون حد چپ تابع و مقدار تابع را می‌یابیم که با توجه به عبارت داخل براکت $[-x]$ می‌دانیم. در نتیجه این ۲ مقدار یعنی حد چپ و مقدار تابع با هم برابر خواهند شد.

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^-}2x-b[-x]=2(-1)-b[-(-1)]=-2-b\Rightarrow -2-b=-\frac{\pi a}{4}\xrightarrow{\times(-1)}2+b=\frac{\pi a}{4}\to\frac{\pi}{4}a-b=2$$

$$\text{حد چپ}:\lim_{x\to 1^-}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^2-1}\xrightarrow[x\to 1^-]{x-1=t\quad t\to 0^-}\lim_{t\to 0^-}\frac{a\cos(\frac{\pi}{2}(t+1))}{(t)(t-2)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{\pi}{2}(-a)\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t(t+2)}=\frac{-\frac{\pi}{2}a}{2}=-\frac{\pi}{4}a$$

برای پیوستگی در نقطهٔ a حد راست و مقدار تابع که با هم برابرند: $f(1)=\lim_{x\to 1^+}bx-[x]=b-[1]=b-1\Rightarrow b-1=-\frac{\pi}{4}a\to -\frac{\pi}{4}a-b=-1$

$$\text{حل دستگاه}\begin{cases}\frac{\pi}{4}a-b=2\\ -\frac{\pi}{4}a-b=-1\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع معادلات}}-2b=1\to b=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\frac{\pi}{4}a+\frac{1}{2}=2\to\frac{\pi}{4}a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{6}{\pi}$$

در سایر نقاط مشکلی برای پیوستگی وجود ندارد.

درنتیجه داریم:

$$a\times b=\frac{6}{\pi}\times(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{\pi}$$

۱۷ ۳ ✓ می‌دانیم: $\lim_{u\to 0}1-\cos u\simeq\frac{u^2}{2}$, $\lim_{u\to 0}\sin u\simeq u$

تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است اگر حد چپ و حد راست تابع برابر مقدار تابع در نقطه $x=0$ باشد.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\frac{0}{0}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\times\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\Rightarrow f(0)=b=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}a+2[x]=a-2=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}+2$$

در نتیجه $a+b=2\sqrt{2}+2$

۱۸ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \frac{-۱۲}{\circ^+} = -\infty$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(f(x)) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{۲x|x| - ۵x^۲}{x^۲ - ۴} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-۲x^۲ - ۵x^۲}{x^۲} = -۷$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۱
۳	۱
۴	۲
۵	۱
۶	۳
۷	۴
۸	۳
۹	۳
۱۰	۳
۱۱	۳
۱۲	۴
۱۳	۱
۱۴	۱
۱۵	۳
۱۶	۴
۱۷	۳
۱۸	۱