



۱) به ازای چه مقدار m معادله $mx^2 - 3x + 2x^2 - 4 = 0$ ریشه حقیقی ندارد؟

۲) تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می‌دهد. f کدام تابع است؟ سپس حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^3$ ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

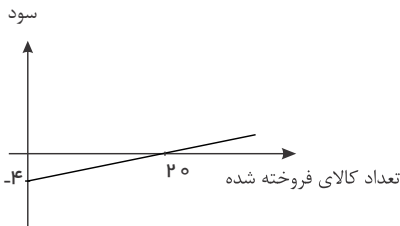
پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^3 - 4$ ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x} - 4$

۳) به شرط $\Delta > 0$ ، با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

۴) معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

۵) نمودار روبه‌رو سود و زیان یک شرکت را برحسب میلیون تومان نمایش می‌دهد. برای سودی بیش از ۵ میلیون تومان، این شرکت حداقل چه

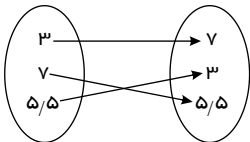
تعداد کالا بفروشد؟



۶) با توجه به نمودار پیکانی زیر جا‌های خالی را کامل کنید.

$$f(3) = \dots$$

$$f(\dots) = 5,5$$



۷) در تابع روبه‌رو متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید.

$$h(x) = x^2 + \sqrt{2x}$$

۸) به ازای چه مقداری از k شیب خطی که از دو نقطه $A(k+2, 3k-2)$ و $B(3k-2, k+5)$ می‌گذرد برابر $\frac{1}{2}$ است؟

۹) معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(3, 5)$ و $B(1, 9)$ بگذرد.

۱۰) تابع f به صورت $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده است. برد تابع f را به دست آورید در صورتی که $A = \{-2, 0, \sqrt{5}\}$ باشد.

۱۱) ثابت کنید معادله $2x^2 - ax - 5 = 0$ همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

۱۲) طول و عرض مستطیلی به محیط ۲۴ و مساحت ۳۵ را بیابید.

۱۳) در معادله $x^2 - 6x + m = 0$ چنانچه یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بزرگ‌تر باشد، مقدار m را بیابید.

۱۴) استخری دو شیر آب A و B دارد. در صورتی که شیر A استخر را ۳ ساعت زودتر از شیر B پر کند و بدانیم اگر دو شیر آب باهم باز باشند

استخر در ۲ ساعت پر می‌شود، شیر B به تنهایی استخر را در چند ساعت پر می‌کند؟

۱۵) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $5x^2 - 10x - 7 = 0$ را بدست آورید.

۱۶) معادله‌های زیر را حل کنید.



الف

$$\frac{3x - 5}{x + 3} = 1$$

ب

$$\frac{3x - 2}{x} + \frac{2x + 5}{x + 3} = 5$$

پ

$$\frac{2}{x + 2} + \frac{x}{x + 2} = x + 3$$

ت

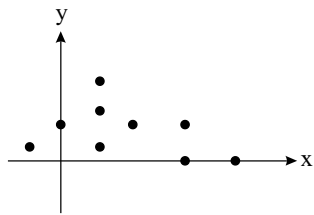
$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1 + x}{x} = \frac{x - 1}{x - 2}$$

ث

$$\frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 3} = \frac{4}{x - 2}$$

ج

$$\frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x + 2}$$



۱۷) نمودار یک رابطه به صورت مقابل است. حداقل چند نقطه باید حذف شود تا رابطه به یک تابع تبدیل شود؟

۱۸) دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A استخر را ۶ ساعت دیرتر از شیر B پر می‌کند. اگر دو شیر را با هم باز کنیم آن‌گاه استخر

در ۴ ساعت پر می‌شود. شیر A به تنهایی استخر را در چند ساعت پر می‌کند؟

۱۹) در حل معادلات زیر به روش مربع کامل کردن، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 5x + \dots = -4 + \dots$$

$$(x - \dots)^2 = \dots \rightarrow x - \dots = \dots \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$$

ب

$$3x^2 - 5x = 2$$

$$x^2 - \dots x = \frac{2}{\dots}$$

$$x^2 - \dots x + \dots = \frac{2}{\dots} + \dots$$

$$(x - \dots)^2 = \dots \rightarrow x - \dots = \dots \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$$

$$f = \{ \dots, (-2, 4), (-1, 2), (0, 0), (1, -2), \dots \}$$

۲۰) تابع f به صورت زیر تعریف شده است.

الف) دامنه و برد تابع f را مشخص کنید.



ب نمایش جبری تابع f را بنویسید.

ب حاصل $\frac{f(5)}{2} - 3f(-3)$ را به دست آورید.

پاسخنامه تشریحی

$$x^2(m+2) - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{فرم استاندارد}} \begin{cases} a = m+2 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

شرط نداشتن جواب حقیقی معادله درجه دوم برابر است با: $\Delta < 0$

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow (-3)^2 - 4(m+2)(-4) < 0 \rightarrow 9 + 16(m+2) < 0$$

$$9 + 16m + 32 < 0 \rightarrow 16m < -41 \rightarrow m < \frac{-41}{16}$$

عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم، دو برابر مکعب همان عدد به صورت $2x^3$ و منهای ۴ شود، به صورت $2x^3 - 4$ نوشته می‌شود. بنابراین قسمت (پ) درست است و داریم:

$$f(x) = 2x^3 - 4$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 4 = 2(27) - 4 = 54 - 4 = 50$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$\frac{\Delta = b^2 - 4ac}{4a^2} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{49}}{4} = \begin{cases} \frac{+3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{+3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2}$$

میزان سود شرکت برحسب تعداد کالای فروخته شده که در آن x تعداد کالا باشد، رابطه‌ای خطی برحسب x است یا فروش هیچ کالایی، شرکت ۴ میلیون تومان ضرر می‌دهد پس رابطه سود به صورت زیر است.

طبق نمودار به ازای فروش ۲۰ کالا $x = 20$ شرکت نه سود می‌دهد نه ضرر پس:

$$0 = 20m - 4 \Rightarrow 20m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

اگر بخواهیم سود بیش‌تر از ۵ میلیون باشد:

$$y > 5 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 4 > 5 \Rightarrow \frac{1}{5}x > 9 \Rightarrow x > 45$$

این بدان معناست که باید حداقل ۴۶ کالا بفروشد تا بیش از ۵ میلیون تومان سود کند.

با توجه به نمودار پیکانی عضو ۳ از دامنه به ۷ وصل شده است پس:

$$f(3) = 7$$

عضو ۷ از دامنه به ۵٫۵ در برد متصل شده است در نتیجه:

$$f(7) = 5,5$$

متغیر مستقل $x =$ متغیر وابسته $h(x)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(k+5) - (3k-2)}{(3k-2) - (k+2)} = \frac{-2k+7}{2k-4} \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2k+7}{2k+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow -4k+14 = 2k-4 \Rightarrow 6k = 18 \Rightarrow k = 3$$

ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$A \begin{cases} 3 \rightarrow x_2 \\ 5 \rightarrow y_2 \end{cases} \quad B \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 \\ 9 \rightarrow y_1 \end{cases}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{5 - 9}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 9 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 9 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 11$$

۱۰

$$f(x) = x^2 + 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 5 = 5 \\ x = \sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 5 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow R_f = \{5, 9, 10\}$$

۱۱ می‌دانیم شرطی که برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز وجود دارد، $\Delta > 0$ است از طرفی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که در این معادله $\Delta = (-a)^2 - 4 \times (2) \times (-5) = a^2 + 40$ است که $a^2 + 40 > 0$ هر دو مثبت هستند پس همواره $\Delta > 0$ است.

۱۲ اگر اندازه‌ی طول مستطیل را a و عرض مستطیل را b بنامیم داریم:

$$(a + b) \times 2 = 24 \rightarrow a + b = 12 \rightarrow b = 12 - a$$

$$a \cdot b = 35 \xrightarrow{b=12-a} a(12 - a) = 35 \rightarrow 12a - a^2 = 35 \rightarrow a^2 - 12a + 35 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه جملی مشترک}} (a - 7)(a - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \xrightarrow{b=12-7} b = 5 \\ a = 5 \rightarrow b = 7 \end{cases}$$

۱۳ دو ریشه‌ی معادله را $\alpha + 2$ و α در نظر می‌گیریم بنابر فرض سوال داریم:

$$\alpha + (\alpha + 2) = \frac{-b}{a} \rightarrow 2\alpha + 2 = \frac{-(-6)}{1} \rightarrow 2\alpha + 2 = 6 \rightarrow \alpha = 2$$

از طرفی می‌دانیم ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ یعنی برابر m است. در نتیجه: $m = \alpha(\alpha + 2) = 2 \times 4 = 8$

۱۴ اگر شیر B استخر را در t ساعت پر کند، شیر A استخر را در $t - 3$ ساعت پر می‌کند بنابر این داریم:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{t-3+t}{t(t-3)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2t-3}{t^2-3t} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه جملی مشترک}} \rightarrow t^2 - 3t = 4t - 6 \rightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \rightarrow (t-1)(t-6) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 6 \end{cases} \quad (\text{زیرا ساعت منفی نمی‌تواند باشد})$$

۱۵

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = \frac{-(-10)}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{5}$$

۱۶

الف

$$\frac{3x-5}{x+3} = 1 \rightarrow \frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{(3x-5) - (x+3)}{x+3} = 0 \rightarrow \frac{2x-8}{x+3} = 0 \rightarrow 2x-8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$$

چون $x = 4$ ریشه‌ی مخرج نیست قابل قبول است.

ب

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \rightarrow \frac{(3x-2) \times (x+3)}{x \times (x+3)} + \frac{(2x+5) \times x}{(x+3) \times x} - \frac{5 \times x \times (x+3)}{1 \times x \times (x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 9x - 2x - 6 + 2x^2 + 5x - 5x^2 - 15x}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x-6 = 0 \rightarrow x = -2$$

چون $x = -2$ ریشه‌ی مخرج نیست پس قابل قبول است.

ب



$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \rightarrow \frac{2+x}{x+2} = x+3 \rightarrow x+3=1 \rightarrow x=-2$$

چون $x = -2$ ریشهٔ مخرج است پس قابل قبول نیست.

ت

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{(x^2 - 2x + 2) \times 1}{x(x-2) \times 1} - \frac{(1+x) \times (x-2)}{x \times (x-2)} - \frac{(x-1) \times x}{(x-2) \times x} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x + 2 - x^2 + x}{x(x-2)} = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 4}{x(x-2)} = 0 \rightarrow -x^2 + 4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = -2 \text{ یا } x = +2$$

$x = 2$ ریشهٔ مخرج است پس قابل قبول نیست ولی $x = -2$ ریشهٔ مخرج نیست پس قابل قبول است.

ث

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2} \rightarrow \frac{3 \times (x+3) - 2(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{x-2}$$

$$\rightarrow \frac{3x+9-2x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{x-2} \rightarrow \frac{x+11}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{x-2}$$

$$\rightarrow \frac{x+11}{(x-1)(x+3)} - \frac{4}{x-2} = 0$$

مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{x^2 - 2x + 11x - 22 - 4x^2 - 8x + 12}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{-3x^2 + x - 10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \rightarrow -3x^2 + x - 10 = 0 \text{ یا } 3x^2 - x + 10 = 0$$

معادله جواب ندارد. $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(10) = 1 - 120 = -119 < 0$

ج

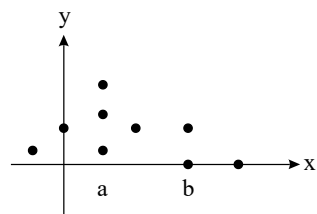
$$\frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2} \rightarrow \frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{(2x-3)}{(x+2)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\rightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \rightarrow \Delta = -8 < 0$$

پس معادله جواب ندارد.

۱۷ با توجه به شکل در نقاط به طول a باید حداقل دو نقطه حذف شود و در نقاط به طول b باید حداقل یک نقطه حذف شود تا تابع شود. پس در مجموع باید حداقل سه نقطه حذف شود تا تابع شود.



شیر B در $x - 6$ ساعت استخر را پر می‌کند. \Rightarrow شیر A در x ساعت استخر را پر می‌کند.

شیر B در یک ساعت $\frac{1}{x-6}$ استخر را پر می‌کند. \Rightarrow شیر A در یک ساعت $\frac{1}{x}$ استخر را پر می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x-6+x}{x(x-6)} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 6x = 4x - 24 \Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-12) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{چون زمان شیر } B \text{ منفی می‌شود (غیر قابل قبول)} \\ x = 12 & \checkmark \end{cases}$$

19

الف در روش مربع کامل کردن، نصف ضریب x را به دست می‌آوریم و به توان دو می‌رسانیم و به طرفین اضافه می‌کنیم. عبارات را به صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم سپس از طرفین ریشه‌گیری می‌کنیم.

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x \text{ نصف ضریب} = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

حال عدد $\frac{25}{4}$ را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-16 + 25}{4} = \frac{9}{4}$$

سپس ریشه‌گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x - \frac{5}{2} &= \pm \frac{3}{2} \\ \rightarrow x &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ & \quad \quad \quad \searrow \\ & \quad \quad \quad x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

ب ابتدا باید ضریب x^2 ، ۱ شود پس طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و سپس مراحل بعدی را ادامه می‌دهیم.

$$3x^2 - 5x = 2 \rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$$

$$x \text{ نصف ضریب} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} \frac{25}{36}$$

$$\rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{2}{3} + \frac{25}{36} \rightarrow \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{25}{36} = \frac{24}{36} + \frac{25}{36} = \frac{49}{36} \rightarrow x - \frac{5}{6} = \pm \frac{7}{6}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \rightarrow x = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6} \rightarrow x = -\frac{7}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

20

الف
 $D = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\} = \mathbb{Z}$
 $R = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

ب
 $\begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = -2x \end{cases}$

ب
 $f(-3) = -2 \times (-3) = 6 \quad f(5) = -2 \times (5) = -10$

$$3f(-3) - \frac{f(5)}{2} = 3 \times 6 - \frac{-10}{2} = 18 + 5 = 23$$