



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه



نام آزمون: ریاضی دهم انسانی فصل اول (تشریحی)

تاریخ آزمون:

۱ کدام یک از معادله‌های زیر به‌ازای هر مقدار  $a$  همواره دارای دو جواب حقیقی متمایز است؟

الف)  $x^2 + ax - 1 = 0$       ب)  $x^2 - x + a = 0$

۲ حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به‌ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۳۲ مشخص می‌شود.

حروف نقطه‌دار به‌صورت  $ax^n$  مشخص شده‌اند که در آن  $a$  شماره حرف الفبا و  $n$  تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به‌عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت  $۴x^۲$  مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ( $a = ۴$ ) و دارای دو نقطه است ( $n = ۲$ ).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{cccc}
 \text{غنچه:} & \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{چ} & + & \text{ه} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & ۲۲x & + & ۲۹x & + & ۷x^۳ & + & ۳۱
 \end{array}$$

معادل ریاضی  $\xrightarrow{\text{غنچه}} ۲۲x + ۲۹x + ۷x^۳ + ۳۱$

حال با توجه به توضیح فوق:

الف) جدول زیر را کامل کنید:

الگوی ریاضی مدل آن	کلمه به زبان فارسی
	آب
$۳x^۲ + ۱$	
	ذرت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

ت) با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

۳ عددی را بیابید که اگر از ۵ برابر آن، ۳۰ واحد کم کنیم حاصل برابر ۲۰ شود.

۴ مربع عددی برابر با همان عدد به‌علاوه عدد دو است آن عدد را پیدا کنید.

۵ معادله‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید و جواب آن‌ها را به دست آورید.

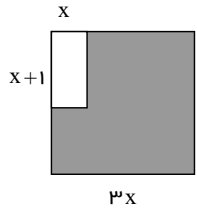
الف)  $\frac{x-1}{4} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+2}{5}$

ب)  $۳x + ۱ = (۴x - ۳) - (۲x - ۵)$

۶ گلدانی از جنس نقره و مس داریم که نسبت وزن نقره‌ی خالص به وزن مس خالص آن برابر ۸ است استاد قلم‌کار آن را ذوب کرده و ۱۰۰ گرم

مس به آن اضافه کرده و گلدان جدیدی می‌سازد. اگر  $\frac{۴}{۵}$  وزن گلدان جدید نقره باشد، این گلدان قبل ذوب شدن چه وزنی داشته است؟





۷ اگر شکل روبه‌رو مربع باشد و مساحت قسمت هاشورخورده  $30$  باشد، مقدار  $x$  را محاسبه کنید.

۸ ثابت کنید معادله‌ی  $2x^2 - ax - 5 = 0$  همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

۹ معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $(2x + 3)(x - 5) = (2x - 2)^2$       ب)  $x(6x - 4) = (3x - 2)(2x + 5)$

۱۰ معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابید که ریشه‌های آن  $4 - \sqrt{7}$  و  $4 + \sqrt{7}$  باشد.

۱۱ اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + 2 = 0$  باشند. مقدار  $x_1^2 + x_2^2$  را محاسبه کنید.

۱۲ در صورتی که  $m \neq 0$  باشد، مقداری از  $m$  را بیابید که به ازای آن معادله‌ی درجه‌ی دوم  $mx^2 - 2x + m - 2 = 0$  فقط یک ریشه داشته باشد.

۱۳ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $1$  و  $2$  باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۱۴ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $5x^2 - 10x - 7 = 0$  را بدست آورید.

۱۵ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف

$$2x^2 - 8 = 0$$

ب

$$(x + 2)(x - 3) = x - 3$$

پ

$$x^6 - 2x^2 = 0$$

ت

$$x^2 = x - \frac{1}{4}$$

ث

$$2x^2 - 8x = 0$$

ج

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

چ

$$\frac{x^2}{3} = x$$

ح

$$x^2 = 5 - x^2$$

خ

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

د

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$



د

$$(x - 3)^2 = 4$$

الف

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ب

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

پ

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x$$

ت

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

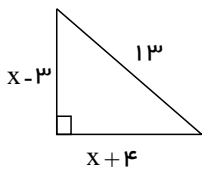
۱۶) معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

۱۷) اگر  $x = 3$  تنها جواب قابل قبول معادله  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - ax - 2} = 0$  باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟

۱۸) در یک محلول آب نمک، نسبت وزن آب خالص به وزن نمک خالص، برابر با ۸ است. اگر ۱۰۰ گرم نمک به این محلول اضافه کنیم، آن گاه  $\frac{4}{5}$

وزن محلول را آب تشکیل خواهد داد. این محلول قبل از اضافه کردن نمک چند گرم وزن داشته است؟

۱۹) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۲۰) مقدار مساحت دایره‌ای ۴ برابر مقدار محیط همان دایره است. مساحت دایره را بیابید.



# پاسخنامه تشریحی

۱

نامساوی همواره برقرار است.  $x^2 + ax - 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-1) \rightarrow \Delta = a^2 + 4 > 0$  (الف)

به ازای تمام مقادیر  $a$  دارای جواب حقیقی است.

ب)  $x^2 - x + a = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$

به ازای  $a < \frac{1}{4}$  معادله همواره دارای دو جواب حقیقی متمایز است.  $1 - 4a > 0 \rightarrow 4a < 1 \xrightarrow{\text{طرفین } (\div 4)} a < \frac{1}{4}$

۲ (الف)

کلمه	الگو
آب	$1 + 2x$
پا	$3x^3 + 1$
ذرت	$11x + 12 + 4x^2$

ب)

پیامبر:  $3x^3 + 32x^2 + 1 + 28 + 2x + 12$

رحمت:  $12 + 8 + 28 + 4x^2$

پ) بله

آرمیتا  $\Rightarrow 1 + 12 + 28 + 32x^2 + 4x^2 + 1$

ت) سلام

$15 + 27 + 1 + 28$

۳ ابتدا باید صورت ریاضی مسئله داده شده را بنویسیم.

۵ برابر عدد یعنی  $5x \Leftarrow$

۳۰ واحد کم کنیم یعنی  $30 - \Leftarrow$

$5x - 30 = 20 \rightarrow 5x = 20 + 30 = 50$

$x = \frac{50}{5} = 10$

۴ عدد  $x =$

و مربع آن  $x^2 =$

طبق فرض مسئله

$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$   
اتحاد یک در جمله‌های مشترک

۵ با توجه به کسری بودن معادله ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم که مخرج مشترک بین سه عدد ۳ و ۴ و ۵ عدد ۶۰ می‌شود و برای از بین رفتن عدد ۶۰ در مخرج همه عبارت‌ها را در ۶۰ ضرب می‌کنیم.

$60 \times \left( \frac{x-1}{4} + \frac{x+1}{3} \right) = 60 \times \frac{x+2}{5}$

$15(x-1) + 20(x+1) = 12(x+2) \Rightarrow 15x - 15 + 20x + 20 = 12x + 24$

$15x + 20x - 12x = 24 + 15 - 20 \Rightarrow 23x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{23}$

ب)

جملات شامل  $x$  را در یک طرف تساوی و عددهای معلوم را در طرف دیگر قرار می‌دهیم:

$3x + 1 = 4x - 3 - 2x + 5$

$\Rightarrow 3x - 4x + 2x = -3 + 5 - 1$

$\Rightarrow x = 1$

۶ وزن مس را  $x$  و وزن نقره را  $y$  فرض می‌کنیم بنا بر فرض سوال داریم

وزن گلدان قبل ذوب  $= x + y = x + 8x = 9x$



وزن گلدان بعد ذوب  $= 9x + 100$

$$\rightarrow \frac{8x}{9x + 100} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5}(9x + 100) = 8x \xrightarrow{\times 5} 4(9x + 100) = 40x \rightarrow 4x = 400 \rightarrow x = 100$$

$\rightarrow$  وزن ابتدای گلدان  $= 9x = \boxed{900}$  گرم

۷ مساحت قسمت هاشور خورده برابر مساحت کل مربع منهای مساحت مستطیل هاشور نخورده است:

$$30 = (3x)^2 - x(x+1) \rightarrow 30 = 9x^2 - x^2 - x \rightarrow 8x^2 - x - 30 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (8) \times (-30) = 961 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{961}}{2 \times 8} = \frac{1 + 31}{16} = \boxed{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{961}}{2 \times 8} = \frac{1 - 31}{16} = \frac{-30}{16} \text{ غ قی} \end{cases}$$

۸ می‌دانیم شرطی که برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز وجود دارد،  $\Delta > 0$  است از طرفی  $\Delta = b^2 - 4ac$  است که در این معادله  $\Delta = (-a)^2 - 4 \times (2) \times (-5) = a^2 + 40$  است که  $a^2$  و  $40$  هر دو مثبت هستند پس همواره  $\Delta > 0$  است.

۹

الف)  $2x^2 - 10x + 3x - 15 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 2x^2 - x + 19 = 0$

$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 19 = -151 < 0$ . معادله جواب حقیقی ندارد.

ب)  $6x^2 - 4x + 15x - 10 = 6x^2 - 4x \rightarrow 11x - 10 = -4x \rightarrow 15x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{15} = \boxed{\frac{2}{3}}$

۱۰

$(x - (4 - \sqrt{7}))(x - (4 + \sqrt{7})) = 0 \Rightarrow x^2 + (-4 + \sqrt{7} - 4 - \sqrt{7})x + (16 - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 9 = 0$

۱۱ ابتدا حاصل جمع و ضرب دو ریشه را به دست می‌آوریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2 \times 2 = 9 - 4 = \boxed{5}$$

۱۲

شرط یک ریشه داشتن  $\Delta = 0 \rightarrow (-2)^2 - 4 \times m \times (m - 2) = 0 \rightarrow 4 - 4m^2 + 8m = 0 \xrightarrow{\div 4} -m^2 + 2m + 1 = 0$

$$\rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} m_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times (-1)}}{-2} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{-2} = \boxed{1 - \sqrt{2}} \\ m_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = \boxed{1 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

۱۳

$(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 3x + 2 = 0}$

خیر منحصر به فرد نیست. هر مضربی از معادله را می‌توان نوشت. مثلاً معادله  $0 = 2x^2 - 6x + 4$  نیز همان جواب‌ها را دارد.

۱۴

مجموع ریشه‌ها  $= -\frac{b}{a} = \frac{-(-10)}{5} = \frac{10}{5} = \boxed{2}$  ضرب ریشه‌ها  $= \frac{c}{a} = \frac{-7}{5}$

۱۵

الف

$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

ب

$(x + 2)(x - 3) = (x - 3)$  طرفین را بر  $(x - 3)$  تقسیم می‌کنیم. به شرط  $x \neq 3$

$$\frac{(x + 2)(x - 3)}{(x - 3)} = \frac{(x - 3)}{(x - 3)}$$

$\rightarrow (x + 2) = 1 \rightarrow x = 1 - 2 = -1$

پ

از  $x^2$  فاکتور می‌گیریم.

$$x^2 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ت



$$x^2 - x + \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

**ث**

از  $2x$  فاکتور می‌گیریم.

$$2x^2 - 8x = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} 2x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

**ج**

اتحاد جمله مشترک

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

**چ**

طرفین  $\times 3$

$$\frac{x^2}{3} = x \xrightarrow{\times 3} x^2 = 3x \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

**ح**

$$x^2 = 5 - x^2 \rightarrow x^2 + x^2 = 5 \rightarrow 2x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

**خ**

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

**د**

جمله مشترک

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (3x + 2)(3x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x - 1 = 0 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

**ذ**

از طرفین جذر می‌گیریم.

$$(x - 3)^2 = 4 \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} \sqrt{(x - 3)^2} = \sqrt{4} \rightarrow x - 3 = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \rightarrow x = 5 \\ x - 3 = -2 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

**الف**

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x = -6 \xrightarrow{+\left(\frac{b}{2}\right)^2} x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

**ب**

را به طرفین اضافه می‌کنیم.

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow 9x^2 + 3x = 2 \xrightarrow{\div 9} \frac{9x^2}{9} + \frac{3x}{9} = \frac{2}{9} \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9} \xrightarrow{+\left(\frac{b}{2}\right)^2} x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

از طرفین جذر می‌گیریم.

$$\xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} \left(x + \frac{1}{6}\right) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

**پ**

را به طرفین اضافه می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{4} \xrightarrow{+\left(\frac{b}{2}\right)^2} x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

**ت**

را به طرفین اضافه می‌کنیم.

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x^2 + 6x = -9 \xrightarrow{+\left(\frac{b}{2}\right)^2} x^2 + 6x + 9 = -9 + 9 \rightarrow (x + 3)^2 = 0 \rightarrow x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

۱۷) می‌دانیم جواب یک معادله گویا فقط وقتی قابل قبول است که ریشهٔ مخرج نباشد. از طرفی اگر جواب‌های معادلهٔ بالا را که همان جواب‌های صورت کسر است بیابیم، خواهیم داشت:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بالا  $x = 2$  باید ریشهٔ مخرج باشد.

$$2^2 - 2(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۱۶

۱۸



$$\left. \begin{array}{l} x = \text{وزن آب خالص} \\ y = \text{وزن نمک خالص} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \lambda \Rightarrow x = \lambda y$$

$$\frac{\text{آب خالص}}{\text{آب نمک}} = \frac{x}{x+y} \xrightarrow[\text{بعد از اضافه کردن 100 گرم نمک}]{\text{بعد از اضافه کردن}} \frac{x}{x+y+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4x + 4y + 400 = 5x \xrightarrow{x=\lambda y} 4y + 400 = \lambda y \Rightarrow 4y = 400 \Rightarrow y = 100$$

$\Rightarrow x = \lambda y = 100 \Rightarrow x + y = 100 + 100 = 200$  وزن محلول قبل از اضافه کردن نمک  $900$

۱۹) براساس قضیه فیثاغورس ابتدا مقدار  $x$  را محاسبه می‌کنیم:

$$(x-3)^2 + (x+4)^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = 144 \Rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \xrightarrow[\text{تجزیه جمله مشترک}]{} (x-8)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -9 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{(x-3)(x+4)}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = \boxed{30}$$

۲۰) اگر شعاع دایره  $R$  باشد،

$$\text{مساحت دایره} = 4 \text{ (محیط دایره)} \Rightarrow \pi R^2 = 4(2\pi R) \rightarrow R^2 = 8R$$

$$\Rightarrow R^2 - 8R = 0 \xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{} R(R-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 0 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ R = 8 \rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi(8)^2 = 64\pi$$