



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه



نام آزمون: ریاضی دهم انسانی فصل دوم تشریحی

تاریخ آزمون:

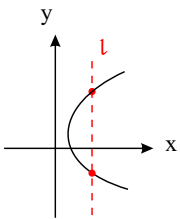
۱ در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هریک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $C(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

۲ آیا نمودار مقابل تابع است؟ چرا؟



۳ اگر $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + |5x|$ باشد، مقدار $f(\sqrt{5}) + f(3\sqrt{7})$ کدام است؟

۴ نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $M \left(\frac{5}{2}, 5 \right)$ بگذرد.

۵ اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود، سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را به کمک نمودار و تعریف کنید.

۶ نمودار سهمی به معادله زیر را رسم کنید.

$$y = 2(x - 3)^2 - 4$$

۷ برد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده به دست آورید.

الف) $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad A = \{x \in \mathbb{Z} | (x-1)(x+3)(x^2-4) = 0\}$

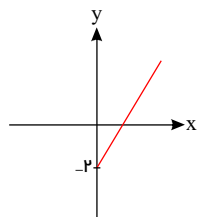
ب) $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2(x-3)^2 \end{cases} \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

۸ برد تابع $y = x^2 - 2x + 5$ را مشخص کنید.

۹ اگر زوج‌های مرتب $(2x - 3, 2y - 5)$ و $(5, 7)$ با هم برابر باشند، مقدار x و y را بیابید.

۱۰ در تابع $f = \{(2, 5), (-1, 1), (5, -1)\}$ حاصل $f(2)$ و $f(f(2))$ و $f(f(f(2)))$ را محاسبه کنید.

۱۱ مجموعه دامنه و برد تابع را با مجموعه‌ای به زبان ریاضی نمایش دهید.

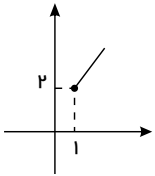


۱۲ اگر $f(x) = |x| - \sqrt{5}$ باشد، حاصل $f(2 - \sqrt{5})$ را محاسبه کنید.

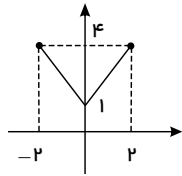
۱۳ اگر برای هر $x \geq 0$ داشته باشیم $f(\sqrt{x}) = 2x + \sqrt{x}$ آنگاه حاصل $f(3) + f(1)$ را محاسبه کنید.

۱۴ معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(3, 5)$ و $B(1, 9)$ بگذرد.

۱۵ دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.



ب)



الف)

۱۶ برای هریک از توابع زیر یک ضابطه مناسب بنویسید.

الف) $f = \{(1, 9), (2, 14), (3, 19), (4, 24)\}$ ب) $g = \{(-2, 1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

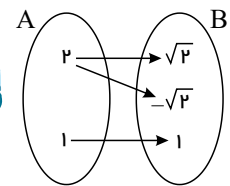
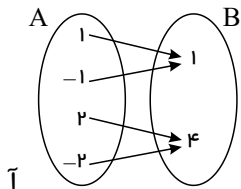
۱۷ اگر رابطه $R = \{(1, 2a + b), (2, 5), (1, 4), (2, a - b)\}$ یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۸ رابطه $y = x^2 + x - 1$ که در آن $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ است را به شکل مجموعه زوج مرتبها بنویسید.

۱۹ اگر دو زوج مرتب $(5x + 6, 7y - 8)$ و $(3x + 2, 6y + 4)$ با هم برابر باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

۲۰ آیا رابطه زیر تابع است؟ چرا؟

الف) آیا نمودار ون زیر تابع است؟ چرا؟



ب) آیا نمودار ون زیر تابع است؟ چرا؟

آیا رابطه زیر تابع است؟ چرا؟

$f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

پاسخنامه تشریحی

۱

الف) درآمد حاصل از فروش x لامپ به قیمت ۲۰۰ تومان برابر است با:

$$R(x) = 200x$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 160x - 100$$

ب) تابع سود، تابع درجه ۲ (سهمی) است و چون $a < 0$ پس max در رأس آن اتفاق می‌افتد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} \Rightarrow x = 80$$

یعنی باید ۸۰ لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد.

پ) $x = 80$ را در تابع سود جایگذاری می‌کنیم:

$$P(80) = -80^2 + 160(80) - 100 \Rightarrow P(80) = 6300$$

بیشترین سود روزانه کارگاه

۲) خیر؛ زیرا اگر خط l را که موازی محور l ها است رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

۳

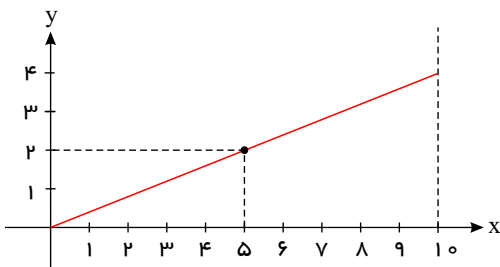
$$f(3\sqrt{7}) = -\frac{2}{3}(3\sqrt{7})^2 + |5 \times (3\sqrt{7})| = -\frac{2}{3}(9 \times 7) + 15\sqrt{7} = -42 + 15\sqrt{7}$$

$$f(\sqrt{5}) = -\frac{2}{3}(\sqrt{5})^2 + |5 \times \sqrt{5}| = -\frac{10}{3} + 5\sqrt{5}$$

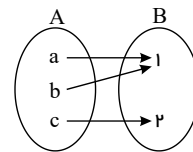
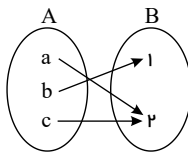
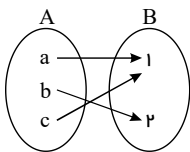
$$\Rightarrow f(3\sqrt{7}) - f(\sqrt{5}) = -42 + 15\sqrt{7} + \frac{10}{3} - 5\sqrt{5} = -\frac{116}{3} + 15\sqrt{7} - 5\sqrt{5}$$

۴

برای این سؤال بی‌شمار جواب می‌توان نوشت که یکی از آنها به صورت زیر است:



۵

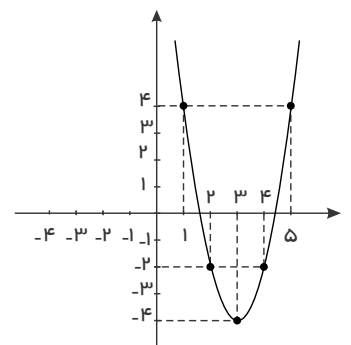


۶) در سهمی به معادله $y = a(x - h)^2 + k$ نقطه (h, k) رأس سهمی است.

با توجه به معادله سهمی $S(3, -4)$ رأس سهمی و چون $a = 2 > 0$ پس نمودار روبه بالا است.

با توجه به جدول نقطه‌یابی نمودار سهمی را رسم می‌کنیم.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	-۲	-۴	-۲	۴



ریاضی دهم انسانی فصل دوم تشریحی

۷

ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم

$$\text{الف) } (x - 1)(x + 3)(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow A = \{1, -3, -2, 2\}$$

اکنون اعضای مجموعه A را در ضابطه قرار می‌دهیم تا اعضای برد تابع به دست آید

$$f(1) = 4, f(-3) = 4, f(2) = 9, f(-2) = 1$$

$$\text{بنابراین برای برد داریم } R = \{4, 9, 1\}$$

(ب) با توجه به دامنه تابع و ضابطه تابع یا محاسبه هر مقدار از دامنه برد تابع را به دست آوریم.

$$f(-2) = 50, f(-1) = 32, f(0) = 18, f(1) = 8, f(2) = 2$$

$$\text{برد: } R = \{2, 8, 18, 32, 50\}$$

۸ ابتدا نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x + 5$$

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 4$$

بنابراین:

$$\text{برد تابع: } A = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 4\}$$

۹

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 5 \Rightarrow 2x = 5 + 3 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Rightarrow 2y - 5 = 7 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{2} = 6$$

۱۰ چون $(2, 5) \in f$ در نتیجه: $f(2) = 5$

کافی است در هر مرحله جایگذاری کنیم تا مقدار خواسته شده را به دست آوریم.

$$f(f(2)) = f(5) \xrightarrow{(5,-1)} = -1$$

$$f(f(f(2))) = f(-1) \xrightarrow{(-1,1)} = 1$$

۱۱ مجموعه طول نقاط را اعضای دامنه و مجموعه عرض نقاط را برد تابع می‌گویند. بنابراین:

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$R_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -2\}$$

۱۲ از آنجا که $2 = \sqrt{4} > \sqrt{5}$ است، پس $2 - \sqrt{5}$ عددی منفی است بنابراین داریم:

$$f(2 - \sqrt{5}) = |2 - \sqrt{5}| - \sqrt{5} = -(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{5} = -2 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = -2$$

۱۳

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= f(\sqrt{9}) = 2 \times 9 + \sqrt{9} = 18 + 3 = 21 \\ f(1) &= f(\sqrt{1}) = 2 \times 1 + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) + f(1) = 21 + 3 = 24$$

۱۴

ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$A \begin{cases} 3 \rightarrow x_2 \\ 5 \rightarrow y_2 \end{cases} \quad B \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 \\ 9 \rightarrow y_1 \end{cases}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{5 - 9}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 9 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 9 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 11$$

۱۵ الف) مجموعه طول نقاط نمودار برابر دامنه تابع و مجموعه عرض نقاط نمودار برابر برد تابع است.

$$D_f: -2 \leq x \leq 2, \quad R_f: 1 \leq y \leq 4$$

$$D_f: 1 \leq x \quad R_f: 2 \leq y \text{ (ب)}$$

$$g(x) = |x + 1| \text{ (ب)}$$

$$f(x) = 5x + 4 \text{ (الف)}$$

۱۶

۱۷

$$\left. \begin{aligned} (1, 2a + b) &= (1, 4) \Rightarrow 2a + b = 4 \\ (2, 5) &= (2, a - b) \Rightarrow a - b = 5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\oplus} 3a = 9 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow[a=3]{a-b=5} b = -2$$



18

$$\left. \begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow y = (-2)^2 + (-2) - 1 = 4 - 2 - 1 = 1 \\ x = -1 &\Rightarrow y = (-1)^2 + (-1) - 1 = 1 - 1 - 1 = -1 \\ x = 0 &\Rightarrow y = 0^2 + 0 - 1 = -1 \\ x = 1 &\Rightarrow y = 1^2 + 1 - 1 = 1 \\ x = 2 &\Rightarrow y = 2^2 + 2 - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \{(-2, 1), (-1, -1), (0, -1), (1, 1), (2, 5)\}$$

19 دو زوج مرتب برابرند اگر مؤلفه‌ها نظیر به نظیر برابر باشند.

برابری عضوهای اول: $3x + 2 = 5x + 6 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

برابری عضوهای دوم: $6y + 4 = 7y - 8 \Rightarrow y = 12$

20

الف تابع است زیرا از هر عضو مجموعه اول یک پیکان خارج شده است.

تابع نیست، زیرا از عدد 2، دو پیکان خارج شده است.

ب تابع نیست، زیرا دو زوج مرتب متمایز (2, 2) و (2, 1) با مؤلفه اول برابر و همچنین دو زوج مرتب (3, 4) و (3, 2) دارای مؤلفه اول برابر هستند.

ت تابع است، زیرا به هر شخص یک شماره ملی نسبت داده می‌شود.

ب