

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: ریاضی دهم انسانی ترم اول تستی

تاریخ آزمون:

۱ در مورد معادله گویای $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x^2-2x}$ کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ دو جواب منفی دارد.
 ۲ یک جواب دارد.
 ۳ جواب حقیقی ندارد.
 ۴ حاصل ضرب جواب‌هایش صفر می‌شود.

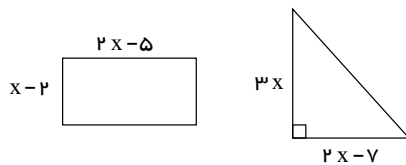
۲ اگر مجموعه $\{2, 7\}$ برد تابع $f(x) = \frac{5x}{x-2}$ باشد، دامنه این تابع کدام است؟

- ۱ $\{-7, \frac{+4}{3}\}$
 ۲ $\{\frac{-4}{3}, 7\}$
 ۳ $\{2, 7\}$
 ۴ $\{5, 3\}$

۳ اگر $f(x) = \frac{-1}{x} + 1$ و $D_f = \{-1, 1, -2, 2\}$ در این صورت R_f برابر کدام گزینه است؟

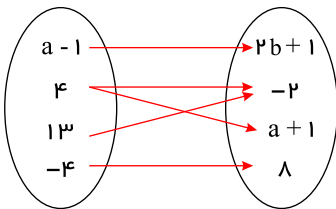
- ۱ $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -2\}$
 ۲ $\{0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2\}$
 ۳ $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\}$
 ۴ $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\}$

۴ اگر مساحت دو شکل زیر برابر باشد، محیط مستطیل کدام است؟



- ۱ ۱۰
 ۲ ۶
 ۳ ۱۳
 ۴ ۴

۵ اگر نمودار مقابل تابع باشد، $2a + 3b$ کدام است؟



- ۱ $\frac{9}{2}$
 ۲ $\frac{7}{2}$
 ۳ ۱
 ۴ -۳

۶ در تابع $f = \{(1, -1), (2, -3), (3, -5), (4, -7)\}$ اعضای برد تابع کدام است؟

- ۱ $R_f = \{1, 2, 3, 4\}$
 ۲ $R_f = \{-1, -3, -5, -7\}$
 ۳ مجموعه اعداد صحیح منفی
 ۴ مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R}

۷ تابع f به هر عدد طبیعی، جذر سه برابر آن عدد، منهای چهار را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع کدام است؟

- ۱ $\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x^2 - 4 \end{cases}$
 ۲ $\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (3x)^2 - 4 \end{cases}$
 ۳ $\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{3x} - 4 \end{cases}$
 ۴ $\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{3x-4} \end{cases}$

۸ حدود k برای آن معادله درجه دوم $3x^2 - x + k = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، کدام است؟

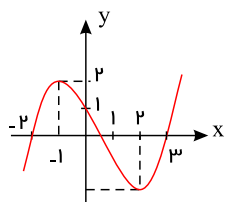
- ۱ $k > \frac{1}{12}$
 ۲ $k > \frac{1}{3}$
 ۳ $k < \frac{1}{3}$
 ۴ $k < \frac{1}{12}$

۹ عددی مثبت از نصف مربعش، ۴ واحد کم‌تر است. آن عدد کدام است؟

- ۱ ۲
 ۲ ۴
 ۳ $\sqrt{5}$
 ۴ ۵

۱۰ مجموع جواب‌های معادله $x - 3 = \frac{x^3 - 2}{x + 2} - \frac{13x + 4}{x^2 - 10}$ چقدر است؟

- ۱ صفر
 ۲ ۱
 ۳ $\sqrt{2}$
 ۴ $-\sqrt{2}$



۱۱) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، $f(-1)$ کدام است؟

- ۱) ۲
۲) ۱
۳) صفر
۴) -۲

۱۲) اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ برابر با $\frac{1}{4}$ باشد، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{2}$
۲) -۳
۳) $\frac{1}{4}$
۴) ۳

۱۳) در یک سری مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه‌ی a و b رابطه $2a + 3b = 60$ برقرار است. ماکزیم مساحت این مثلث‌ها کدام است؟

- ۱) ۱۵۰
۲) ۷۵
۳) ۱۲۰
۴) ۶۰

۱۴) حاصل جمع ریشه‌های معادله $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{10} = 0$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{5}$
۲) $\sqrt{3}$
۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۵) سه برابر عددی، به علاوه ۳ برابر قرینه‌ی دو برابر آن عدد، به علاوه ۳۸ است، آن عدد کدام است؟

- ۱) ۹
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۱۰

۱۶) علی از بردارش ۱۰ سال بزرگ‌تر است. اگر ۹ سال بعد سن برادر علی ۴ برابر شود، آن‌گاه علی در حال حاضر چند سال دارد؟

- ۱) ۱۳
۲) ۹
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۱۷) اگر خط $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله $y = 5x^2 + kx - 3$ باشد، آنگاه کدام نقطه روی نمودار سهمی قرار ندارد؟

- ۱) $(0, -3)$
۲) $(-1, -8)$
۳) $(1, 12)$
۴) $(2, 30)$

۱۸) معادله‌ی محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در حالت کلی کدام است؟

- ۱) $2ax + b = 0$
۲) $2ay + b = 0$
۳) $2x - b = 0$
۴) $2y - b = 0$

۱۹) دو نمودار $y = -3x + 2$ و $y = 2x^2 + x + 2$ در کدام نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

- ۱) $(2, -8)$
۲) $(-2, 8)$
۳) $(2, 8)$
۴) $(-2, -8)$

۲۰) معادله $\frac{x-1}{2x+3} = \frac{x}{5x+4}$ دارای دارای

- ۱) فقط یک جواب مثبت است.
۲) دو جواب منفی است.
۳) دو جواب مثبت است.
۴) یک جواب مثبت و یک جواب منفی است.



پاسخنامه تشریحی

در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم: (1) (2) (3) (4)

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x(x-1)} \Rightarrow \frac{2x(x+2) + (x-1)(x-4)}{2x(x-1)} = \frac{4}{2x(x-1)}$$

مخرج‌ها در دو طرف تساوی برابر است. در نتیجه:

$$x \neq 0, 1 \Rightarrow 2x^2 - x + 4 = 4 \Rightarrow 2x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (غ.ق.ق)} \\ x = \frac{1}{2} \text{ (ق.ق)} \end{cases}$$

جواب $x = 0$ قابل قبول نیست. چون باعث صفر شدن یکی از مخرج‌ها در معادله اولیه می‌شود و تنها جواب معادله $x = \frac{1}{2}$ است.

(1) (2) (3) (4) (2)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta x}{x-2} = 2 \Rightarrow \Delta x = 2x - 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{2} \\ \frac{\Delta x}{x-2} = 7 \Rightarrow \Delta x = 7x - 14 \Rightarrow -2x = -14 \Rightarrow x = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بنابراین برای دامنه } f \text{ داریم:}} D_f = \left\{ -\frac{4}{2}, 7 \right\}$$

با قرار دادن اعضای دامنه f ($D_f = \{-1, 1, -2, 2\}$) در ضابطه تابع $f(x) = \frac{-1}{x} + 1$ اعضای برد f را مشخص می‌کنیم. (1) (2) (3) (4) (3)

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{-1}{-1} + 1 = 2 \\ x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{-1}{1} + 1 = 0 \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = \frac{-1}{-2} + 1 = \frac{3}{2} \\ x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow R_f = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right\}$$

(1) (2) (3) (4) (4)

مساحت مثلث = مساحت مستطیل

$$(x-2)(2x-5) = \frac{1}{2} \times 3x \times (2x-7) \Rightarrow 2x^2 - 5x - 4x + 10 = \frac{1}{2}(6x^2 - 21x)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 3x^2 - \frac{21}{2}x \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 20 = 0 \xrightarrow{ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -20 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (2) \times (-10) = 9 + 160 = 169$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{3 + 13}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ ق.ق} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{3 - 13}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

$x = -\frac{5}{2}$ قابل قبول نیست، زیرا اندازه‌ی طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد. حال محیط مستطیل را می‌یابیم:

$$x-2 \quad \boxed{\quad} \xrightarrow{x=4} 2 \quad \boxed{\quad}$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2 \times (2 + 3) = 2 \times 5 = 10$$

چون از عدد 4 دو بیکان خارج شده، پس مولفه‌های دوم باید با هم برابر باشند: (1) (2) (3) (4) (5)

$$a + 1 = -2 \Rightarrow a = -3$$

حال اگر $a = -3$ را در $a - 1$ قرار دهیم، جواب -4 می‌شود. از طرفی -4 قبلاً به 8 وصل شده پس:



$$2b + 1 = +8 \Rightarrow 2b = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$

$$2a + 3b = 2(-3) + 3\left(\frac{7}{2}\right) = -6 + \frac{21}{2} = \frac{-12 + 21}{2} = \frac{9}{2}$$

در نمایش تابع به صورت زوج مرتبی، مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج مرتبها دامنه تابع و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتبها برد تابع می‌باشد. بنابراین

داریم:

$$f = \{(1, -1), (2, -3), (3, -5), (4, -7)\} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه: } D_f = \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{برد: } R_f = \{-1, -3, -5, -7\} \end{cases}$$

عبارت توصیفی را به صورت نماد ریاضی می‌نویسیم، داریم:

اگر هر عدد طبیعی را با نماد x نشان دهیم، جذر ۳ برابر عدد به صورت $\sqrt{3x}$ است، که اگر چهار واحد از آن کم کنیم به صورت $f(x) = \sqrt{3x} - 4$ درمی‌آید. پس ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{3x} - 4 \end{cases}$$

شرط این که معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد این است که مبین معادله یا Δ مثبت باشد.

$$3x^2 - x + k = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} ax^2 + bx + c = 0 \quad a = 3, b = -1, c = k$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4(3)k > 0 \Rightarrow 1 - 12k > 0 \\ \Rightarrow 12k < 1 \Rightarrow k < \frac{1}{12} \end{cases}$$

اگر عدد مورد نظر را x فرض کنیم، از نصف مربعش، یعنی $\frac{1}{2}x^2$ و ۴ واحد کم تر است. پس:

$$x = \frac{1}{2}x^2 - 4 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در ۲}} x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (x + 2)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

با توجه به مسئله، عدد مورد نظر مثبت است. بنابراین $x = 4$ جواب صحیح است.

معادله مورد نظر را می‌توان این طور نوشت:

$$\left(\frac{x^2 - 2}{x + 2} + 3\right) - \left(\frac{13x + 4}{x^2 - 1} + x\right) = 0$$

مخرج مشترک می‌گیریم و حل می‌کنیم:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x + 2} - \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1} = 0$$

از $x^3 + 3x + 4$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x^2 + 3x + 4)\left(\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 1}\right) = 0$$

$$(x^2 + 3x + 4)\left(\frac{x^2 - x - 12}{(x + 2)(x^2 - 1)}\right) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 4 = (x + 1)(x^2 - x + 4) = 0 \rightarrow x = -1 \\ x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \rightarrow x = -3, x = 4 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها صفر است.

تذکر:

$$x^2 + 1 + 3x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 4)$$

با توجه به شکل اگر $x = -1$ باشد، آن‌گاه $y = 2$ است. بنابراین: $f(-1) = 2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$x^2 - 2mx + m - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -2m, c = m - 1$$

$$P: \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{m - 1}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2m - 2 = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$S: \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{1} = 2m = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

با توجه به رابطه $2a + 3b = 60$ و $S = \frac{ab}{2}$ داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳



$$2a + 3b = 60 \Rightarrow 2a = 60 - 3b \Rightarrow a = 30 - \frac{3}{2}b \quad (*)$$

$$\Rightarrow S = \frac{(30 - \frac{3}{2}b)b}{2} = \frac{30b - \frac{3}{2}b^2}{2} = -\frac{3}{4}b^2 + 15b$$

برای آنکه ماکزیم مساحت را داشته باشیم، باید:

$$b_{max} = \frac{-15}{2 \times (-\frac{3}{4})} = \frac{-15}{-\frac{3}{2}} = 10$$

$$\Rightarrow a_{max} = 30 - \frac{3}{2} \times 10 = 15$$

$$\Rightarrow S_{max} = \frac{10 \times 15}{2} = 75$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{10} &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{3}, c = -\sqrt{10}$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow S = \frac{-(-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

صورت فارسی سوال را به زبان ریاضی نوشته و حل می‌کنیم. عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$3x + 3 = -2x + 38 \rightarrow 5x = 35 \rightarrow x = 7$$

سن علی را y و سن برادرش را x فرض می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\begin{cases} y - x = 10 \\ 4x = x + 9 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 13 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$x_{\text{رأس}} = -1 \rightarrow \frac{-k}{5 \times 2} = -1 \Rightarrow \frac{-k}{5 \times 2} = -1 \Rightarrow k = 10$$

$$\text{معادله: } y = 5x^2 + 10x - 3$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 20 + 20 - 3 = 37$$

بعد از محاسبه متوجه می‌شویم گزینه ۴ در معادله صدق نمی‌کند و نقطه سایر گزینه‌ها در معادله صدق می‌کند.

$$\text{معادله محور تقارن } x = \frac{-b}{2a} \text{ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸}$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2ax + b = 0$$

برای به دست آوردن نقطه تقاطع دو نمودار کافی است ضابطه‌های آن‌ها را با یکدیگر برابر قرار دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x + 2 = -3x + 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

حال با قراردادن $x = 0$ و $x = -2$ در یکی از دو معادله مقادیر y متناظر با آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \times (0) + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow -3 \times (-2) + 2 = 6 + 2 = 8$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲، درست است.

معادله را با استفاده از طرفین وسطین کردن حل می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$\frac{x-1}{2x+3} = \frac{x}{5x+4} \Rightarrow (x-1)(5x+4) = x(2x+3)$$



$$\Rightarrow 5x^2 + 4x - 5x - 4 = 2x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow 5x^2 - x - 4 = 2x^2 + 3x \Rightarrow 5x^2 - 2x^2 - x - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد } ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \times (3) \times (-4) = 16 + 48 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{4 + 8}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{4 - 8}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

حال باید بررسی کنیم که جواب‌های بدست آمده ریشهٔ مخرج کسرها نباشند، از آن‌جا که x_1 و x_2 با $\frac{3}{2}$ و $\frac{4}{5}$ برابر نیستند، هر دو جواب قابل قبول است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴