



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: ریاضی هشتم فصل دوم تستی

تاریخ آزمون:

۱ ۴۸ چند شمارنده اول دارد؟

- ۱ ۴ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۴

۲ کدام جمله نادرست است؟

- ۱ هر عدد طبیعی حداقل یک مقسوم علیه اول دارد. ۲ تنها مقسوم علیه اول عدد ۱۷ خود ۱۷ است.
 ۳ هر عدد مرکب را می توان به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. ۴ اعداد اول می توانند هم زوج باشند و هم فرد.

۳ برای آنکه تحقیق کنیم عدد ۱۲۳۱ اول است یا مرکب کفایت بخش پذیری آن را بر چند عدد اول بررسی کنیم؟

- ۱ ۹ ۲ ۱۰ ۳ ۱۱ ۴ ۱۲

۴ a بر b بخش پذیر است و b و c متباین اند. در این صورت اگر $A = (b^n, c^m)$ و $B = (a^n, b^m)$ باشد و بدانیم $n > m$ است، A و B کدامها هستند؟

- ۱ $\begin{cases} A = 1 \\ B = b \end{cases}$ ۲ $\begin{cases} A = bc \\ B = b^m \end{cases}$ ۳ $\begin{cases} A = 1 \\ B = b^m \end{cases}$ ۴ $\begin{cases} A = bc \\ B = (ab)^m \end{cases}$

۵ عدد ۱۰۵ نسبت به کدام یک از اعداد زیر، اول است؟

- ۱ ۱۲۳ ۲ ۶۹ ۳ ۱۲۵ ۴ ۱۰۶

۶ در یک غربال اراتستن برای پیدا کردن اعداد اول بین ۱ تا ۲۵۰ بعد از حذف ۱۸۷ کدام عدد حذف می شود؟

- ۱ ۱۹۸ ۲ ۱۶۹ ۳ ۲۰۹ ۴ ۲۲۰

۷ در الگوریتم غربال، برای تعیین اعداد اول از ۱ تا ۳۰۰۰، کدام عدد زیر دیرتر از بقیه خط می خورد؟

- ۱ ۲۱۲۱ ۲ ۲۳۲۳ ۳ ۱۵۱۵ ۴ ۲۹۲۹

۸ اعداد ۱ تا ۱۰۰ را نوشته ایم، از طریق الگوریتم غربال اعداد اول را جدا می کنیم. پنجاه و دومین عددی که خط می خورد کدام است؟

- ۱ ۹ ۲ ۱۰۰ ۳ ۱۲ ۴ ۱۵

۹ کوچک ترین عدد سه رقمی که سه شمارنده اول دارد کدام است؟

- ۱ ۱۰۶ ۲ ۱۰۲ ۳ ۱۰۳ ۴ ۱۰۰

۱۰ چند عدد طبیعی دو رقمی کوچکتر از ۹۰ وجود دارد که عدد قبلی آن و عدد ۲ واحد بزرگتر از آن، یکی مربع کامل و یکی اول باشد؟

- ۱ تا ۶ ۲ تا ۴ ۳ تا ۷ ۴ تا ۲

۱۱ کدام جمله صحیح است؟

- ۱ هر عدد طبیعی، یا اول است یا مرکب. ۲ عدد $1 + 10^7 + 12^7$ اول است.
 ۳ تمام اعداد اول دارای دو مقسوم علیه طبیعی متمایز می باشند. ۴ هر عدد طبیعی لااقل یک مقسوم علیه اول دارد.

۱۲ کوچک ترین عدد طبیعی که اگر آن را بر اعداد گویای $\frac{21}{32}$ ، $\frac{35}{18}$ و $\frac{42}{25}$ تقسیم کنیم، حاصل یک عدد صحیح شود، کدام است؟

- ۱ ۲۱۰ ۲ ۱۸۰ ۳ ۴۲۰ ۴ ۷۲۰



۱۳) اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به هم اول باشند، حاصل عبارت $\frac{[a, b]}{(a, b)}$ لزوماً کدام است؟ ($a > b > 1$)

- ۱) b (۱) ۲) a (۲) ۳) ab (۳) ۴) ۱ (۴)

۱۴) حاصل عبارت زیر اگر ضرب در مجذور خودش کنیم، در تقسیم بر کدام عدد باقی مانده ۱ دارد؟

$$A = (6, (9, (15, (225, 75)))$$

- ۱) ۲ (۱) ۲) ۷ (۲) ۳) ۸ (۳) ۴) ۵ (۴)

۱۵) سه برابر حاصل ضرب دو عدد اول ۲۷۳ است. نصف مجموع آن‌ها کدام است؟

- ۱) ۹۱ (۱) ۲) ۴۵٫۵ (۲) ۳) ۱۰ (۳) ۴) ۵۵٫۵ (۴)

۱۶) چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که نسبت به ۱۲ اول باشد؟

- ۱) ۱۹ (۱) ۲) ۳۰ (۲) ۳) ۲۸ (۳) ۴) ۳۴ (۴)

۱۷) در روش غربال برای به دست آوردن اعداد اول کمتر از ۱۰۰۰، ترتیب خط خوردن اعداد ۶۶۷، ۲۲۱، ۹۹۸ و ۸۰۱ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- ۱) ۲۲۱ و ۶۶۷ و ۸۰۱ و ۹۹۸ (۱) ۲) ۹۹۸ و ۲۲۱ و ۸۰۱ و ۶۶۷ (۲) ۳) ۶۶۷ و ۲۲۱ و ۸۰۱ و ۹۹۸ (۳) ۴) ۲۲۱ و ۶۶۷ و ۸۰۱ و ۹۹۸ (۴)

۱۸) چند عدد بین ۱ تا ۵۰ هستند که حاصل جمع همهٔ شمارنده‌های آن عدد یکی بیش‌تر از خود عدد است؟

- ۱) ۴ (۱) ۲) ۱۰ (۲) ۳) ۱۶ (۳) ۴) ۱۵ (۴)

۱۹) کدام جمله درست است؟

- ۱) ب.م.م هر عدد اول با هر عدد طبیعی مرکب، یک است. (۱)
 ۲) در روش غربال، عدد یک جزء اعدادی است که خط می‌خورد. (۲)
 ۳) نمی‌توان سه عدد فرد متوالی یافت که هر سه اول باشند. (۳)
 ۴) هر عدد اول دو مضرب دارد. (۴)

۲۰) در روش غربال برای پیدا کردن عدد اول کوچکتر از ۲۰۰، آخرین عدد اولی که مضاربش خط می‌خورد کدام است؟

- ۱) ۱۱ (۱) ۲) ۱۳ (۲) ۳) ۱۷ (۳) ۴) ۱۹ (۴)



پاسخنامه تشریحی

ابتدا عدد ۴۸ را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم و شمارنده‌های اول را به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$48 = 2^4 \times 3 \quad \text{دو تا یعنی ۲ و ۳:}$$

عدد یک نه مرکب است و نه اول و تنها مقسوم‌علیه آن یک است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
سایر گزینه‌ها صحیح است.

$$\sqrt{1231} = 35,000 \Rightarrow \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\} \quad \text{تا } 11$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

a بر b بخش پذیر باشد، a^n بر b^n نیز بخش پذیر است و چون b^m بر b^n بخش پذیر است ($m < n$)، پس a^n بر b^m نیز بخش پذیر است، پس:

$$(a^n, b^m) = b^m$$

از طرفی وقتی b و c متباین‌اند، به هر توانی برسند باز هم متباین‌اند! پس $(b^n, c^m) = 1$.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

عدد مورد نظر نباید شمارنده‌های ۳، ۵، ۷ داشته باشد. $105 = 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow$

۱- ۱۲۳ بر ۳ بخش پذیر است و چون ۱۰۵ نیز بر ۳ بخش پذیر است پس نسبت به هم اول نیستند.

۲- ۶۹ بر ۳ بخش پذیر است و چون ۱۰۵ نیز بر ۳ بخش پذیر است پس نسبت به هم اول نیستند.

۳- ۱۲۵ بر ۵ بخش پذیر است و چون ۱۰۵ نیز بر ۵ بخش پذیر است پس نسبت به هم اول نیستند.

۴- ۱۰۵ و ۱۰۶ هیچ مقسوم علیه مشترکی ندارند پس نسبت به هم اولند.

نکته: هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند.

عدد ۱۸۷ مضرب ۱۱ است و مضرب بعدی عدد ۱۱، ۱۹۸ است که قبلاً خط خورده است و عدد بعدی ۲۰۹ است که خط می‌خورد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$2121 = 3 \times 7 \times 101, 2323 = 23 \times 101, 1515 = 3 \times 5 \times 101, 2929 = 29 \times 101$$

عدد ۱۵۱۵ و ۲۱۲۱ هر دو بر ۳ بخش پذیرند و زودتر خط می‌خورند.

اعداد 101×29 و 101×23 به ترتیب مضرب ۲۹ و ۲۳ هستند و با توجه به اول بودن اعداد ۲۳ و ۲۹، پس $101 \times 29 = 2929$ دیرتر از بقیه خط می‌خورد.

اولین عددی که خط می‌خورد یک است. سپس مضرب‌های دو خط می‌خورند که ۴۹ تا هستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

پس تا الان ۵۰ خط خورده‌اند، پنجاه و یکمین عدد ۹ است زیرا ۶ در مضارب ۲ خورده است و پنجاه و دومین عدد ۱۵ است زیرا ۱۲ در مضارب دو خط خورده است.

کوچکترین عددی که دارای سه شمارنده اول است، عدد $30 = 2 \times 3 \times 5$ است که دو رقمی است، ولی کوچکترین عدد سه رقمی با این شرایط برابر است با: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

$$2 \times 3 \times 17 = 102$$

ابتدا اعداد مربع کامل ۲ رقمی را می‌یابیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

$$16, 25, 36, 49, 64, 81$$

اعداد ۳ واحد کوچکتر با ۳ واحد بزرگتر از اعداد فوق را یافته و می‌بینیم کدام یک اول هستند.

$$13, 19, 22, 28, 33, 39, 46, 52, 61, 67, 78, 84$$

از بین اعداد فوق اعداد ۱۳، ۱۹، ۶۱ و ۶۷ اول هستند.

پس مجموعاً ۴ عدد ۲ رقمی با این شرط وجود دارد.

چون هر عدد اولی بر ۱ و خودش بخش پذیر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱

۱) عدد یک نه اول است و نه مرکب.

۲) عددی زوج است و بر ۲ بخش پذیر است، پس مرکب است. \Rightarrow فرد + فرد = زوج

۴) فقط یک مقسوم علیه دارد که برابر خودش است که اول نیست.

عدد طبیعی مورد نظر را با x نشان می‌دهیم و بر اعداد گویای داده شده، تقسیم می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱

حاصل این کسر باید صحیح شود، چون:

$$x \div \frac{21}{32} = x \times \frac{32}{21} = \frac{x \times 32}{21} \Rightarrow$$

۲۱ و ۳۲ هیچ مقسوم علیه مشترک ندارند. پس x باید بر ۲۱ بخش پذیر باشد؛ یعنی x مضربی از ۲۱ است.

به طور مشابه دو کسر $\frac{42}{25}$ و $\frac{35}{18}$ چون قابل ساده شدن نیستند. پس x باید بر ۳۵ و ۴۲ بخش پذیر باشد، یعنی x مضربی از ۳۵ و ۴۲ است؛ چرا که:



$$\begin{cases} x \div \frac{35}{18} = x \times \frac{18}{35} = \frac{x \times 18}{35} \Rightarrow \text{عدد صحیح است} \\ x \div \left(-\frac{42}{25}\right) = x \times \left(-\frac{25}{42}\right) = -\frac{x \times 25}{42} \Rightarrow \text{عدد صحیح است} \end{cases}$$

در نتیجه x مضربی از ۲۱، ۳۵ و ۴۲ است و چون می‌خواهیم x کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد، پس x ک.م.م سه عدد ۲۱، ۳۵ و ۴۲ است.

$$x = [21, 35, 42] = 3 \times 7 \times 2 \times 5 = 210$$

نکته: دو عدد نسبت به هم اولند اگر هیچ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از یک نداشته باشند، بنابراین اگر a و b دو عدد نسبت به هم اول باشند، داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$\left. \begin{matrix} (a, b) = 1 \\ [a, b] = a \times b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{[a, b]}{(a, b)} = \frac{a \times b}{1} = ab$$

نکته: همواره برای همهٔ اعداد طبیعی رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد:

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

$$(((225, 75), 15), 9), 6) = (((75, 15), 9), 6) = ((15, 9), 6) = (3, 6) = 3 = A$$

$$A^2 = 9$$

$$A \times A^2 = 3 \times 9 = 27$$

در تقسیم عدد ۲۷ بر عدد ۲ باقی‌مانده ۱ خواهد بود.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$273 \div 3 = 91 \text{ حاصل ضرب دو عدد اول}$$

$$91 = 7 \times 13 \text{ دو عدد اول}$$

$$10 \xrightarrow{\text{نصف}} 13 + 7 = 20 \text{ مجموع دو عدد}$$

عدد ۱۲ بر اعداد اول ۲ و ۳ بخش پذیر است. پس آن اعداد دو رقمی نسبت به ۱۲ اول هستند که نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیر باشند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

$$90 - 9 = 99 = \text{تعداد کل اعداد دو رقمی}$$

از ۱۰ تا ۹۹، ۴۵ عدد بر ۲ بخش پذیر است. (۴۵ عدد هم فرد هستند)

از ۱ تا ۹۹، ۳۳ عدد بر ۳ بخش پذیر است که ۳ تا از آنها ۱ رقمی هستند. ۹ و ۶ و ۳.

$$30 = 33 - 3 = \text{تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۳}$$

تعدادی از اعداد، هم بر ۲ بخش پذیرند و هم بر ۳، پس دو بار شمرده شده‌اند. پس اعداد بخش پذیر بر ۶ را می‌یابیم.

$$6 \text{ عدد بخش پذیر بر } 6 \text{ از } 99 \text{ داریم (یک رقمی است)} \rightarrow \frac{6}{16}$$

$$-6$$

$$39$$

$$-36$$

$$3$$

$$15 = 16 - 1 = \text{تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۶}$$

$$30 = 90 - 60 = 90 - (45 + 30 - 15) = 90 - 60 = 30 \text{ تعداد اعدادی که نسبت به ۱۲ اول هستند.}$$

اعدادی که مضرب اعداد اول کوچک‌تری هستند، زودتر خط می‌خورند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۷)

$$998 \rightarrow 2 \text{ مضرب} \Rightarrow \text{اول خط می‌خورد}$$

$$801 \rightarrow 3 \text{ مضرب} \Rightarrow \text{دوم خط می‌خورد}$$

$$221 \rightarrow 13 \text{ مضرب} \Rightarrow \text{سوم خط می‌خورد}$$

$$667 \rightarrow 23 \text{ مضرب} \Rightarrow \text{چهارم خط می‌خورد}$$

اعداد اول دارای دو شمارنده، یکی خود عدد و دیگری یک، هستند. بنابراین فقط اعداد اول هستند که مجموع شمارنده‌های آن‌ها یکی بیش‌تر از خود عدد است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸)

بنابراین کافی است اعداد اول بین ۱ تا ۵۰ را پیدا کنیم که به صورت زیر هستند:

$$15 = \text{تعداد} \Rightarrow 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۹) رد گزینهٔ ۱) ب.م.م عدد ۲ با هر عدد زوج مرکب، ۲ است.

رد گزینهٔ ۳) سه عدد فرد متوالی ۵، ۳ و ۷ اول‌اند.

گزینهٔ ۴) هر عدد اول دو شمارنده دارد و بی‌شمار مضرب.

(۲۰) در روش غربال خط زدن را تا مضارب عدد اولی ادامه می‌دهیم که مجذور آن در بین اعداد وجود داشته باشد.

$$169 < 200 < 289 \Rightarrow 13 < \sqrt{200} < 17$$

پس آخرین عدد اولی که مضاربش خط می‌خورد عدد ۱۳ است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴