



زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:



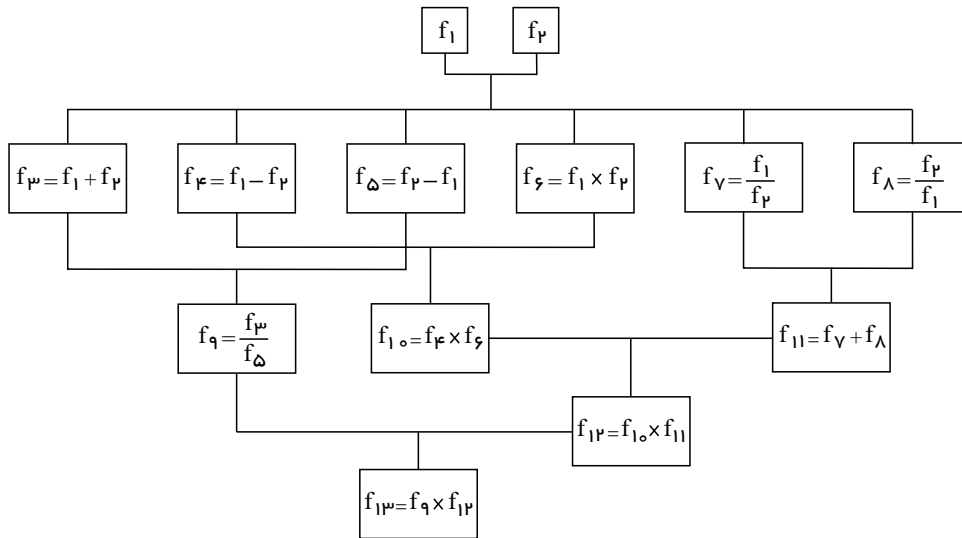
نام آزمون: ریاضی یازدهم فصل دوم تشریحی

تاریخ آزمون:

۱ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مجموعه برد آن را مشخص کنید.

۲ اگر $(f - g)(x) = 5x - 3$ و $f(x) = 3x - 2$ باشند، ضابطه تابع $g(x)$ را مشخص کنید.

۳ با توجه به ضابطه $f_1(x) = x + 1$ و $f_2(x) = x - 1$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.



۴ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x + 2| + 1$ را رسم کنید.

۵ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x + 2|$ را رسم کنید.

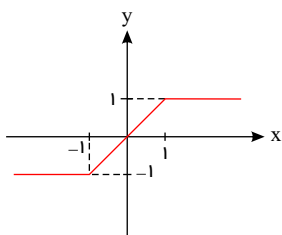
۶ جدول زیر را کامل کنید.

نمودار مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمودار پیکانی

۷ اگر f یک تابع همانی باشد، جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(3, \dots), (\dots, 5, 5), (3, 25, \dots), (6, 6)\}$$

۸ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



۹ مقدار a, b را طوری مشخص کنید که ضابطه $f(x) = (a - 1)x^2 + bx + 4$ یک تابع ثابت باشد.



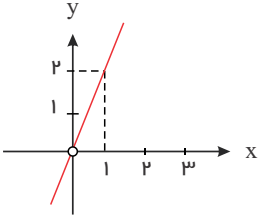
۱۰ نمودار مختصاتی تابع دو ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 3 & , x < 0 \end{cases}$$

۱۱ اگر مجموعه زوج مرتب‌های زیر مربوط به یک تابع ثابت باشد، در این صورت مقادیر a ، b را مشخص کنید.

$$\{(7, 3a - b - 2), (2, 3a + 2b - 2), (3, 4)\}$$

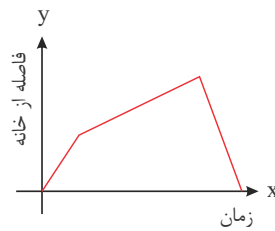
۱۲ اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید؟



۱۳ با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2,3$ $x = 5$	
$f(x) = [-x]$	$x = 1,7$ $x = 2,3$	
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$ $x = 1,3$ $x = 1,7$ $x = 2$	
$f(x) = [3x]$	$x = 1$ $x = 0,2$ $x = 1,3$	

۱۴ نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟

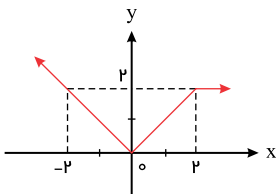


الف) آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آن‌ها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.

ب) علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.

ج) محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۵ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.





۱۶) با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$ ، الف ضابطه توابع زیر را به دست آورید:

a) $f_3(x) = (f_1 + f_2)(x)$

b) $f_4(x) = (f_1 - f_2)(x)$

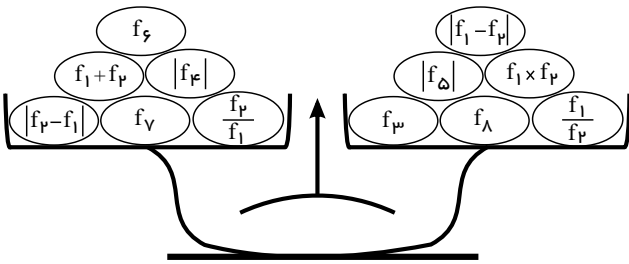
c) $f_5(x) = (f_2 - f_1)(x)$

d) $f_6(x) = (f_1 \times f_2)(x)$

e) $f_7(x) = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)$

f) $f_8(x) = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x)$

الف) اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به ازای $x = 2$ نمادهای وزنه‌های کفه‌های ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



۱۷) اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = 2 - 2x$ باشند، نمودار تابع‌های f ، g و $f + g$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۸) عبارت‌های قدرمطلق زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید.

الف) $f(x) = |2x| + 2x$

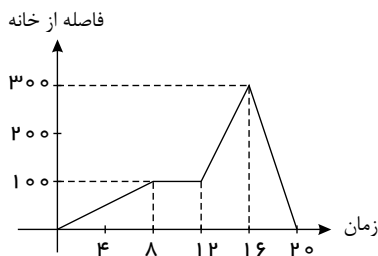
ب) $f(x) = x|x| + [x]$

۱۹) الف) حجم مکعب مستطیل با ابعاد ۱، ۱ و x با افزایش مقدار x چگونه تغییر می‌کند؟

ب) تابع حجم مکعب مستطیل را یافته و نوع آن را مشخص کنید.

پ) زمانی که حجم مکعب مستطیل ۸ است، مقدار x چقدر باید باشد؟ چرا؟

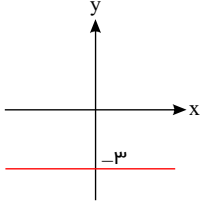
۲۰) با توجه به نمودار زیر، داستان مناسبی بنویسید.





پاسخنامه تشریحی

۱ ضابطه $f(x) = -3$ تابع ثابت با مجموعه برد $R_f = \{-3\}$ است.



۲

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow 5x - 3 = 3x - 2 - g(x)$$

$$\Rightarrow -g(x) = 5x - 3 - 3x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow -g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 1$$

۳

$$f_1(x) = x + 1 \Rightarrow f_1(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f_2(x) = x - 1 \Rightarrow f_2(2) = 2 - 1 = 1$$

$$f_+(2) = f_1(2) + f_2(2) = 3 + 1 = 4$$

$$f_-(2) = f_1(2) - f_2(2) = 3 - 1 = 2$$

$$f_\Delta(2) = f_2(2) - f_1(2) = 1 - 3 = -2$$

$$f_\times(2) = f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 1 = 3$$

$$f_\div(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$f_\wedge(2) = \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{1}{3}$$

$$f_\circlearrowleft(2) = \frac{f_2(2)}{f_\Delta(2)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

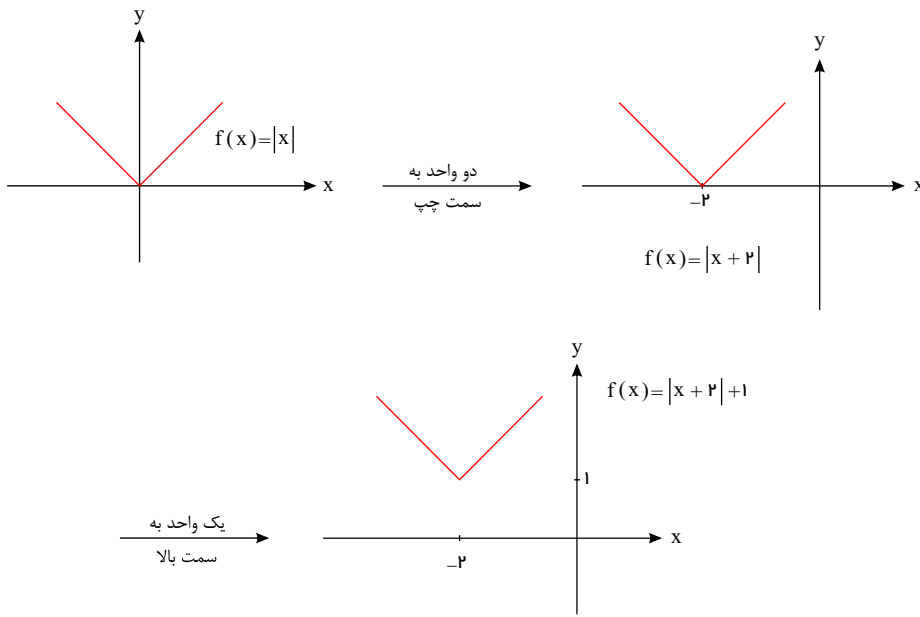
$$f_{\circ}(2) = f_+(2) \times f_\times(2) = 4 \times 3 = 12$$

$$f_{+}(2) = f_\div(2) + f_\wedge(2) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

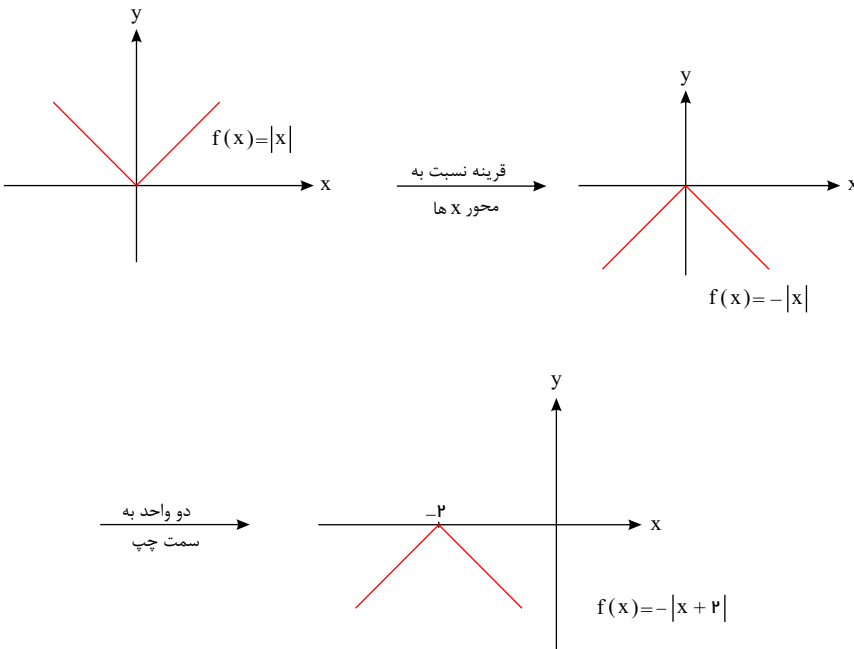
$$f_{\times}(2) = f_{\circlearrowleft}(2) \times f_{+}(2) = -\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$f_{\circlearrowright}(2) = f_\circlearrowleft(2) \times f_{\times}(2) = -\frac{1}{2} \times -\frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

۴ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x + 2| + 1$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را دو واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



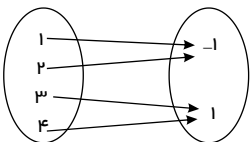
۵ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x + 2|$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. سپس دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



۶ با توجه به مختصات نقاط در نمودار مختصاتی، نمایش زوج مرتبی این تابع را مشخص می‌کنیم.

$$\{(1, -1), (2, -1), (3, 1), (4, 1)\}$$

مؤلفه‌های اول نمایش زوج مرتبی مربوط به دامنه و مؤلفه‌های دوم آن مربوط به اعضای برد تابع است در نتیجه نمودار پیکانی این تابع به صورت زیر خواهد بود.



۷ در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$f = \{(3, 3), (5, 5), (3, 25), (3, 25), (6, 6)\}$$

۸ این تابع برای مقادیر $x \geq 1$ تابع ثابت $f(x) = 1$ ، برای $-1 < x < 1$ تابع همانی $f(x) = x$ و برای $x \leq -1$ تابع ثابت $f(x) = -1$ است.

در نتیجه ضابطه این تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 1 \\ x & , -1 < x < 1 \\ -1 & , x \leq -1 \end{cases}$$

۹ ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ (c یک عدد حقیقی) است.



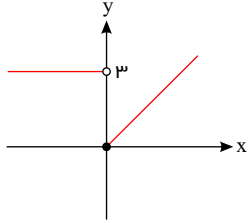
$$f(x) = (a-1)x^2 + bx + 4 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

با قرار دادن $b=0$, $a=1$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = 4$$

۱۰

این تابع دو ضابطه‌ای برای x ‌های بزرگتر مساوی صفر ($x \geq 0$) تابع همانی و برای x ‌های کوچکتر از صفر ($x < 0$) تابع ثابت $f(x) = 3$ است. بنابراین نمودار آن به صورت زیر است:



۱۱ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت همه مؤلفه‌های دوم با هم برابرند.

$$\begin{cases} 3a - b - 2 = 4 \\ 3a + 2b - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (-1) \times \begin{cases} 3a - b = 6 \\ 3a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + b = -6 \\ 3a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + b = -6 \\ 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$3a - b = 6 \xrightarrow{b=0} 3a - 0 = 6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

۱۲

برای تعیین ضابطه تابع $g(x)$ لازم است ضابطه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را مشخص کنیم و برای آن باید معادله خط نمودار رسم شده را به دست آوریم.

با توجه به شکل عرض از مبدأ خط مورد نظر $h = 0$ است، بنابراین برای تعیین شیب خط، مختصات نقطه $(1, 2)$ را در معادله استاندارد خط جایگزین می‌کنیم.

$$y = mx + h \xrightarrow[\text{نقطه } (1,2)]{h=0} 2 = m(1) + 0 \Rightarrow m = 2$$

با مشخص بودن شیب و عرض از مبدأ معادله خط را می‌نویسیم.

$$y = mx + h \xrightarrow[\text{شیب } m=2]{h=0} y = 2x$$

روش دوم: شیب خط برابر تغییرات y نسبت به تغییرات x است.

با توجه به نمودار، شیب خط ۲ و عرض از مبدأ صفر بوده و معادله خط به صورت $y = 2x$ است.

ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ همان معادله خط است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x$$

اکنون که ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ مشخص شده می‌توانیم ضابطه تابع g را نیز تعیین کنیم.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 2x \xrightarrow{f(x)=x^2} \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow 2x \times g(x) = x^2 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر } 2x}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2x} \quad (x \neq 0)$$

با در نظر گرفتن $x \neq 0$ می‌توانیم صورت و مخرج کسر را به x ساده کنیم.

$$g(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$$

۱۳

الف) $f(x) = [x]$

$$f(-2, 3) = [-2, 3] = -3$$

$$f(5) = [5] = 5$$

ب) $f(x) = [-x]$

$$f(1, 7) = [-1, 7] = -2$$

$$f(2, 3) = [2, 3] = 2$$

ج) $f(x) = [x] + [-x]$



$$f(1) = [1] + [-1] = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

روش دوم:

$$x = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(1,3) = [1,3] + [-1,3] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

روش دوم:

$$x = 1,3 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(1,7) = [1,7] + [-1,7] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

روش دوم:

$$x = 1,7 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(2) = [2] + [-2] = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$$

روش دوم:

$$x = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$د) f(x) = [3x]$$

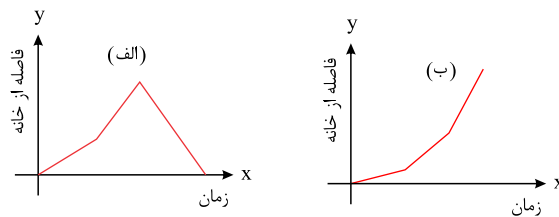
$$f(1) = [3 \times 1] = [3] = 3$$

$$f(0,2) = [3 \times 0,2] = [0,6] = 0$$

$$f(1,3) = [3 \times 1,3] = [3,9] = 3$$

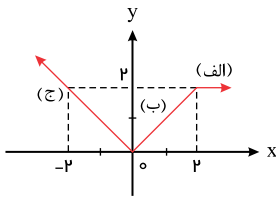
۱۴) نمودار رسم شده، مربوط به داستان قسمت ج است.

نمودار مربوط به هر یک از داستان‌های الف و ب به صورت زیر است.



تذکر: با توجه به اطلاعات محدود داستان‌ها، نمودارها تقریبی رسم شده‌اند.

۱۵) نمودار را به ۳ قسمت (الف) و (ب) و (ج) تفکیک کرده و ضابطه هر یک را به طور جداگانه تعیین می‌کنیم.



الف) در قسمت (الف) به ازای تمام مقادیر x در دامنه تعریف، مقدار y ثابت و برابر ۲ می‌باشد. (تابع ثابت)

ب) در قسمت (ب) به ازای هر مقدار x در دامنه تعریف، همان مقدار برای y مشخص می‌شود. (تابع همانی، نیمساز ناحیه اول)

ج) در قسمت (ج) به ازای هر مقدار x در دامنه تعریف، مقدار قرینه آن برای y به دست می‌آید. (نیمساز ناحیه دوم)

بنابراین تابع سه ضابطه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$a) f_{\neq}(x) = f_1(x) + f_r(x) = (x^x - 1) + (x + 1) = x^x + x$$

$$\Rightarrow f_{\neq}(x) = x^x + x$$

$$b) f_{\neq}(x) = f_1(x) - f_r(x) = x^x - 1 - (x + 1) = x^x - 1 - x - 1 = x^x - x - 2$$

$$\Rightarrow f_{\neq}(x) = x^x - x - 2$$



$$c) f_{\Delta}(x) = f_r(x) - f_1(x) = x + 1 - (x^r - 1) = x + 1 - x^r + 1 = -x^r + x + 2$$

$$\Rightarrow f_{\Delta}(x) = -x^r + x + 2$$

$$d) f_{\Sigma}(x) = f_1(x) \times f_r(x) = (x^r - 1)(x + 1) = x^r + x^r - x - 1$$

$$\Rightarrow f_{\Sigma}(x) = x^r + x^r - x - 1$$

$$e) f_{\nu}(x) = \frac{f_1(x)}{f_r(x)} = \frac{x^r - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \stackrel{x \neq -1}{=} x - 1$$

$$\Rightarrow f_{\nu}(x) = x - 1, x \neq -1$$

$$f) f_{\lambda}(x) = \frac{f_r(x)}{f_1(x)} = \frac{x + 1}{x^r - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} \stackrel{x \neq -1}{=} \frac{1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow f_{\lambda}(x) = \frac{1}{x - 1}, x \neq -1$$

الف

حال با توجه به ضابطه توابع f_{λ} تا f_1 به ازای $x = 2$ مقادیر دو کفه ترازو را به دست می آوریم:
کفه چپ ترازو از بالا به پایین برابر است با:

$$f_{\Sigma}(x) = x^r + x^r - x - 1 \Rightarrow f_{\Sigma}(2) = 2^r + 2^r - 2 - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9$$

$$\Rightarrow f_{\Sigma}(2) = 9$$

$$f_1(x) = x^r - 1 \Rightarrow f_1(2) = 2^r - 1 = 3$$

$$f_r(x) = x + 1 \Rightarrow f_r(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow f_1(2) + f_r(2) = 3 + 3 = 6$$

$$f_{\nu}(x) = x^r - x - 2 \Rightarrow f_{\nu}(2) = 2^r - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$f_{\nu}(2) = 0 \Rightarrow |f_{\nu}(2)| = 0$$

$$f_r(2) = 3, f_1(2) = 3 \Rightarrow |f_r(2) - f_1(2)| = |3 - 3| = 0$$

$$f_{\nu}(x) = x - 1 \Rightarrow f_{\nu}(2) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow f_{\nu}(2) = 1$$

$$f_r(2) = 3, f_1(2) = 3 \Rightarrow \frac{f_r(2)}{f_1(2)} = \frac{3}{3} = 1$$

مجموع کفه سمت چپ برابر است با:

$$f_{\Sigma} + (f_1 + f_r) + |f_{\nu}| + |f_r - f_1| + f_{\nu} + \frac{f_r}{f_1} = 9 + 6 + 0 + 0 + 1 + 1 = 17$$

کفه راست ترازو از بالا به پایین برابر است با:

$$f_1(2) = 3, f_r(2) = 3$$



$$|f_1(2) - f_2(2)| = |3 - 3| = 0 \Rightarrow |f_1(2) - f_2(2)| = 0$$

$$f_\Delta(x) = -x^2 + x + 2 \Rightarrow f_\Delta(2) = -2^2 + 2 + 2 = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow |f_\Delta(2)| = |0| = 0$$

$$f_1(2) = 3, \quad f_2(2) = 3$$

$$f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 3 = 9$$

$$f_w(x) = x^2 + x \Rightarrow f_w(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow f_w(2) = 6$$

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f_\lambda(2) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow f_\lambda(2) = 1$$

$$f_1(2) = 3, \quad f_2(2) = 3 \Rightarrow \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{3} = 1$$

مجموع کفه سمت راست برابر است با:

$$|f_1 - f_2| + |f_\Delta| + f_1 \times f_2 + f_w + f_\lambda + \frac{f_1}{f_2} = 0 + 0 + 9 + 6 + 1 + 1 = 17$$

مجموع دو کفه سمت راست و سمت چپ ترازو با هم برابرند. از تساوی دو کفه ترازو نتیجه می‌گیریم:

$$1) f_2(2) = f_1(2) \times f_2(2)$$

$$2) f_1(2) + f_2(2) = f_w(2)$$

$$3) |f_2(2)| = |f_\Delta(2)|$$

$$4) |f_2(2) - f_1(2)| = |f_1(2) - f_2(2)|$$

$$5) f_2(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)}$$

$$6) \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = f_\lambda(2)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 1 + 2 - 2x = 1 \text{ تابع ثابت}$$

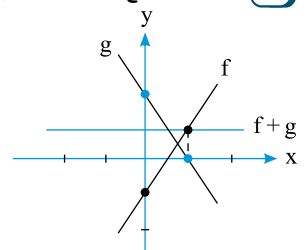
$$f(x) = 2x - 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 1 \end{array}$$

$$g(x) = 2 - 2x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow f(x) = 2x + 2x = 4x \\ 2x < 0 \rightarrow x < 0 \rightarrow f(x) = -2x + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4x, & (x \geq 0) \\ 0, & (x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow f(x) = x^2 + [x] \\ x < 0 \rightarrow f(x) = -x^2 + [x] \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + [x], & (x \geq 0) \\ -x^2 + [x], & (x < 0) \end{cases}$$

۱۷) ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را حساب می‌کنیم.



۱۸) الف)

ب)

۱۹) الف) به همان مقدار افزایش x , حجم نیز افزایش پیدا می‌کند.

ب) $V(x) = 1 \times 1 \times x \Rightarrow V(x) = x$ تابع همانی

پ) با توجه به همانی بودن تابع باید $x = 8$ باشد.



۲۰) این سؤال پاسخ‌های مختلفی می‌تواند داشته باشد که یکی از آن‌ها به شکل زیر است.

«محمد رضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. پس از هشت دقیقه هنگام دویدن دوست خود را در حال استراحت دید، چهار دقیقه ایستاد و با او احوال‌پرسی کرد. سپس با سرعت بیشتری به دویدن پرداخت. او پس از چهار دقیقه به انتهای مسیرش رسید، سپس با نهایت سرعت خود به سمت خانه حرکت کرد و پس از چهار دقیقه به خانه رسید.»