نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۷۵دقیقه

نام آزمون: تابع ( تشریحی)

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) نمودار تابع $y = ۲\sin(۲x) + ۱$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

۲) ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -\frac{۷}{۲}x - ۳$ را به‌دست آورید.

۳) با فرض $f(x) = \frac{۲x - ۱}{x + ۲}$ و $g = \{(۳, -۱), (۰, ۲), (۴, ۱), (۱, -۲)\}$، دامنه، برد و اعضای تابع ترکیب $fog$ را مشخص کنید.

۴) اگر دامنهٔ تابع $y = f(x)$ به‌صورت $D_f = (-۲, ۵]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = f(۲x - ۱) + ۲$ را بیابید.

۵) نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x + ۱$ را ابتدا دو واحد به‌سمت پایین، سپس یک واحد به‌سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

۶) اگر دامنهٔ تابع $y = f(x)$ برابر $[-۱, ۳]$ و برد آن $[۰, ۲]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f(\frac{x}{۲})$ را بیابید.

۷) برای تابع $f = \{(۲, -۱), (۱, ۳), (۰, ۴)\}$، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید. آیا توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ باهم برابرند؟

۸) با فرض $f = \{(۰, ۲), (-۲, ۳), (۴, ۵)\}$ و $g = \{(۳, ۰), (۱, ۶), (۵, -۱)\}$ تابع‌های مرکب $fog$ و $gof$ را با اعضایشان مشخص کنید.

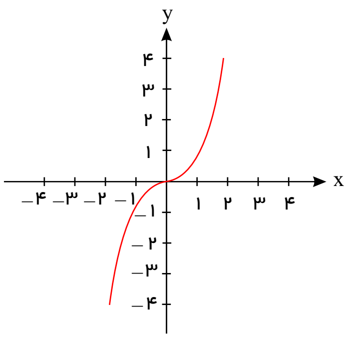
۹) ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-۸x + ۳}{۲}$

ب) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$

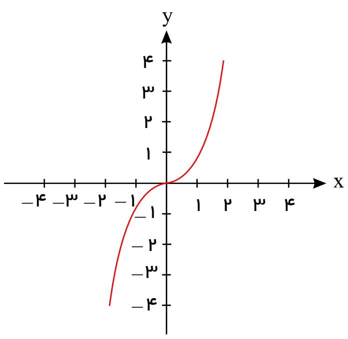
۱۰) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۳$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

الف



$y = -x^۳ - ۲$

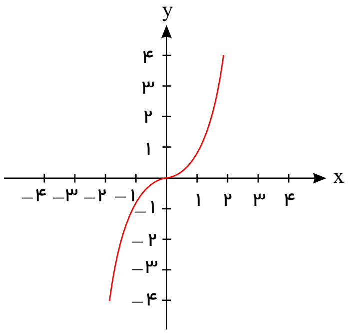
ب



$y = (x + ۲)^۳$

پ

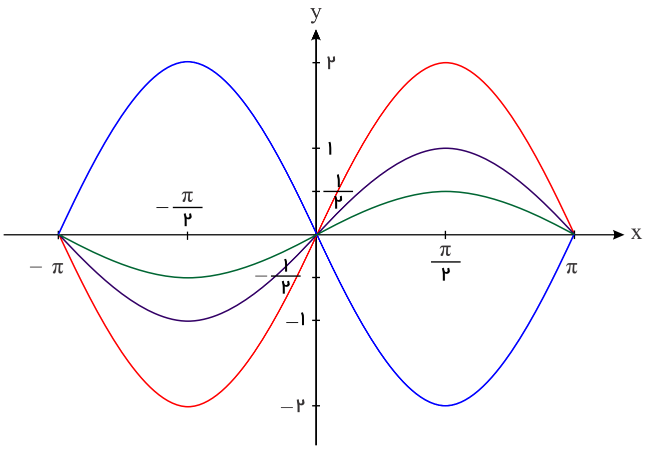
$y = -(x-۲)^۳$




**۱۱** به تابعی که ................ باشد تابع یکنوا و به تابعی که ................ باشد تابع اکیداً یکنوا گفته می‌شود.

**۱۲** نمودار تابع $y = |\sqrt{x}|$ را به‌کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

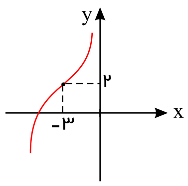
**۱۳** در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$، $y = ۲\sin x$، $y = -۲\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.




**۱۴** نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x - ۳ & x < -۴ \\ ۳ & -۴ \leq x < ۲ \\ ۳x - ۲ & x \geq ۲ \end{cases}$$

**۱۵** اگر نمودار $y = (x+a)^۳ + b$ به‌صورت مقابل باشد، مقادیر $a$ و $b$ را بیابید.

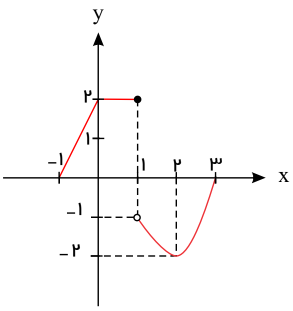



**۱۶** نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

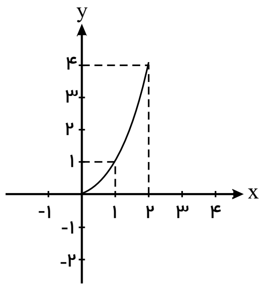
الف) $y = -x^۳ + ۱$

ب) $y = -(x+۱)^۳ - ۱$

**۱۷** نمودار تابع $y = f(x-۱)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x) - ۱$ را رسم کنید.




**۱۸** نمودار تابع $f$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار $f$ مقایسه کنید.




**الف**

$y = f(-x)$

**ب**

$y = -f(x)$

**پ**

$y = -f(-x)$

**۱۹** با توجه به نمودار تابع $f(x) = |x|$، نمودار تابع $y = f(-۲x + ۲) - ۱$ را رسم کنید.

**۲۰** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

**الف** اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.

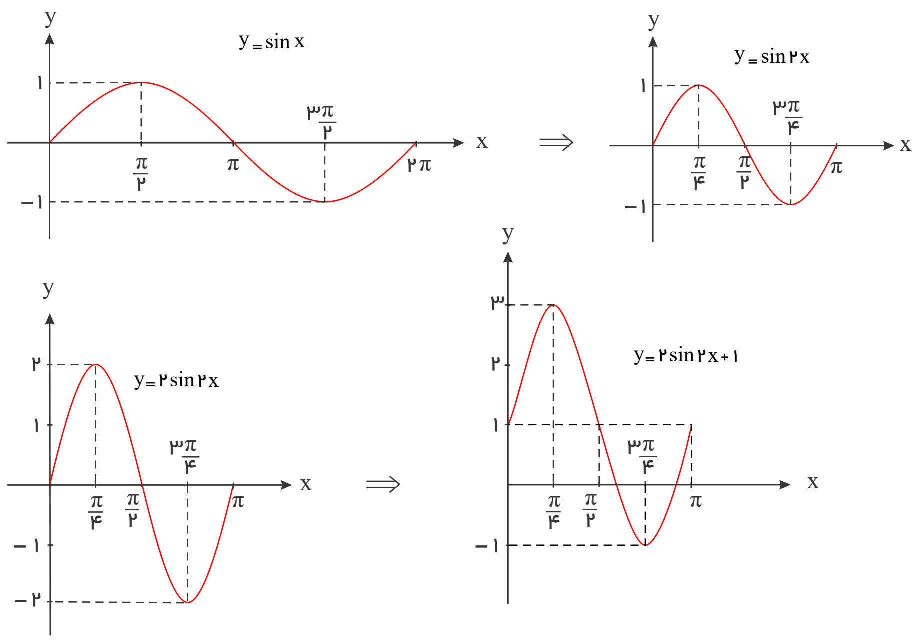
# پاسخنامه تشریحی

**۱** برای رسم $y = 2\sin(2x)+1$ از روی $y=\sin x$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ـ طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

۲ـ عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم.

۳ـ نمودار حاصل را یک واحد به بالا می‌بریم.




**۲**

$$f(x) = -\frac{7}{2}x - 3 \to y = -\frac{7}{2}x - 3 \to \frac{7}{2}x = -y - 3 \to 7x = -2y - 6 \to x = \frac{-2y-6}{7} \to f^{-1}(x) = \frac{-2x-6}{7}$$

**۳** ابتدا توجه داریم که: $R_g = \{-1, 2, 1, -2\}$ و $D_g = \{3, 0, 4, 1\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

اکنون با توجه به تعریف‌های $fog(x) = f(g(x))$ و $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$، درمی‌یابیم که تابع $fog$ روی آن‌دسته از دامنه‌های $g$ اثر می‌کند که برد متناظر با آن دامنه متعلق به دامنهٔ تابع $f$ بوده باشد. براین اساس داریم:

$$fog(3) = f(g(3)) = f(-1) \xlongequal{\text{ضابطه } f} \frac{2(-1)-1}{-1+2} = -3 \quad (3 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} -3 : 3 \xrightarrow{fog} -3)$$

$$fog(0) = f(g(0)) = f(2) \xlongequal{\text{ضابطه } f} \frac{2(2)-1}{2+2} = \frac{3}{4} \quad (0 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} \frac{3}{4} : 0 \xrightarrow{fog} \frac{3}{4})$$

$$fog(4) = f(g(4)) = f(1) \xlongequal{\text{ضابطه } f} \frac{2(1)-1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad (4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \frac{1}{3} : 4 \xrightarrow{fog} \frac{1}{3})$$

$$fog(1) = f(g(1)) = f(-2) = \frac{2(-2)-1}{-2+2} = \frac{-5}{0} \quad \times \quad (-2 \notin D_f)$$

بنابراین می‌بینیم که $D_{fog} = \{3, 0, 4\}$، $R_{fog} = \{-3, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}\}$ و لذا $fog = \{(3,-3), (0, \frac{3}{4}), (4, \frac{1}{3})\}$ می‌باشد.

**۴**

$$y = f(x) \Rightarrow D_f = (-2, 5] \Rightarrow -2 < x \leq 5$$
$$g(x) = f(2x-1) + 2 \Rightarrow -2 < 2x - 1 \leq 5$$

توجه کنید در تابع $g$ عبارت بعلاوهٔ ۲، در دامنهٔ تابع تاثیری ندارد. پس داریم:

$$-2 < 2x - 1 \leq 5 \xrightarrow{+1} -1 < 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} < x \leq 3 \Rightarrow D_g = (-\frac{1}{2}, 3]$$

**۵** مرحلهٔ اول:

$$f(x) - 2 = (x-1)^2 - 2$$

مرحلهٔ دوم:

$$f(x+۱)-۲=x^۲-۲$$

مرحلهٔ سوم:

$$-f(x+۱)+۲=-x^۲+۲$$

۶) برد تغییر نمی‌کند.

$$D_{f(\frac{x}{۲})}\Rightarrow -۱<\frac{x}{۲}\leq ۳\rightarrow D_{f(\frac{x}{۲})}=[-۲,۶]$$

۷) برای $fof^{-۱}(a)$، $a$ از دامنهٔ $f^{-۱}$ انتخاب می‌شود در حالی‌که برای $f^{-۱}of(a)$، $a$ از دامنهٔ $f$ انتخاب می‌شود:

$$f=\{(۲,-۱),(۱,۳),(۰,۴)\}\quad , \quad f^{-۱}=\{(-۱,۲),(۳,۱),(۴,۰)\}$$

$$\begin{cases} fof^{-۱}(-۱):\ -۱\xrightarrow{f^{-۱}}۲\xrightarrow{f}-۱:\ -۱\xrightarrow{fof^{-۱}}-۱ \\ fof^{-۱}(۳):\ ۳\xrightarrow{f^{-۱}}۱\xrightarrow{f}۳:\ ۳\xrightarrow{fof^{-۱}}۳ \\ fof^{-۱}(۴):\ ۴\xrightarrow{f^{-۱}}۰\xrightarrow{f}۴:\ ۴\xrightarrow{fof^{-۱}}۴ \end{cases}\Rightarrow fof^{-۱}=\{(-۱,-۱),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

$$\begin{cases} f^{-۱}of(۲):\ ۲\xrightarrow{f}-۱\xrightarrow{f^{-۱}}۲:\ ۲\xrightarrow{f^{-۱}of}۲ \\ f^{-۱}of(۱):\ ۱\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{f^{-۱}}۱:\ ۱\xrightarrow{f^{-۱}of}۱ \\ f^{-۱}of(۰):\ ۰\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{f^{-۱}}۰:\ ۰\xrightarrow{f^{-۱}of}۰ \end{cases}\Rightarrow f^{-۱}of=\{(۲,۲),(۱,۱),(۰,۰)\}$$

همان‌طورکه می‌بینید توابع ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ هردو همانی بوده ولی باهم برابر نیستند.

۸) برای تابع $fog$ باتوجه به تعریف‌های $fog(a)=f(g(a))$ و $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$، می‌گوییم تابع مرکب $fog$ روی آن‌دسته از دامنه‌های $g$ (مانند $a$) اثر می‌کند که $g(a)$ متعلق به دامنهٔ $f$ بوده باشد. داریم:

$$fog(۳)=f(g(۳))=f(۰)=۲\ \ (۳\xrightarrow{g}۰\xrightarrow{f}۲:۳\xrightarrow{fog}۰)$$
$$fog(۱)=f(g(۱))=f(۶)\ \times\ \ (\text{زیرا}:\ ۶\notin D_f)$$
$$fog(۵)=f(g(۵))=f(-۱)\ \times\ \ (\text{زیرا}:\ -۱\notin D_f)$$

درنتیجه تابع $fog$ تنها یک عضو به‌صورت $fog=\{(۳,۰)\}$ دارد.

و اما درمورد تابع $gof$ باتوجه به تعاریف $gof(b)=g(f(b))$ و $D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$، می‌گوییم تابع $gof$ تنها می‌تواند روی آن‌دسته از دامنه‌های $f$ (مانند $b$) اثر کند که $f(b)$ متعلق به دامنهٔ $g$ بوده باشد. در این صورت داریم:

$$gof(۰)=g(f(۰))=g(۲)\ \times\ \ (\text{زیرا}:\ ۲\notin D_g)$$
$$gof(-۲)=g(f(-۲))=g(۳)=۰\ \ (-۲\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}۰:-۲\xrightarrow{gof}۰)$$
$$gof(۴)=g(f(۴))=g(۵)=-۱\ \ (۴\xrightarrow{f}۵\xrightarrow{g}-۱:۴\xrightarrow{gof}-۱)$$

بنابراین تابع $gof$ دارای دو عضو به‌صورت $gof=\{(-۲,۰),(۴,-۱)\}$ است.

۹)

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}\ :\ y=\dfrac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲y=-۸x+۳\xrightarrow{-۳}-۸x=۲y-۳$

$$\xrightarrow{\div(-۸)}x=\frac{۲y-۳}{-۸}=\frac{-۱}{۴}y+\frac{۳}{۸}\xrightarrow{\text{حالا}}f^{-۱}(x)=\frac{-۱}{۴}x+\frac{۳}{۸}$$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\ :\ y=-۵-\sqrt{۳x+۱}\rightarrow y+۵=-\sqrt{۳x+۱}$

$$\xrightarrow[\left(\substack{y+۵\leq ۰\\ y\leq -۵}\right)]{\text{به توان ۲ برسان}}(y+۵)^۲=(۳x+۱)\xrightarrow{-۱}(y+۵)^۲-۱=۳x\xrightarrow{\div ۳}x=\frac{۱}{۳}(y+۵)^۲-\frac{۱}{۳}$$

$$\overset{x\geq\frac{-۱}{۳}}{\xrightarrow{\text{حالا}}}g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}(x+۵)^۲-\frac{۱}{۳}$$

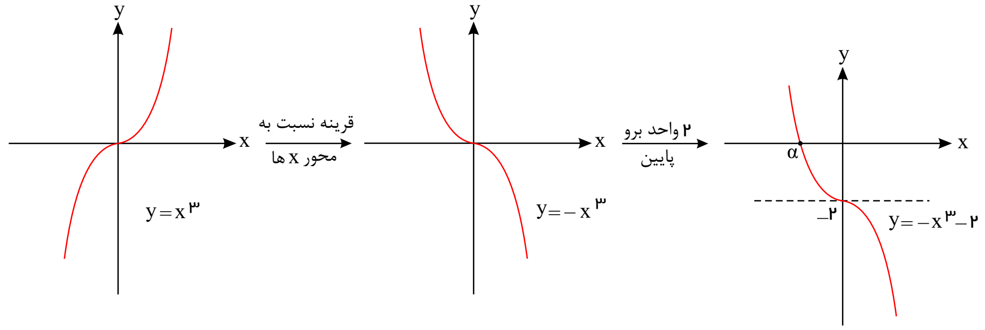
که با توجه به شرایط $y\leq -۵$ و $x\geq\dfrac{-۱}{۳}$، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-۱}}=R_g=(-\infty,-۵]\ ,\ R_{g^{-۱}}=D_g=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$$

۱۰)

الف) برای رسم نمودار $y=-x^۳-۲$ از روی نمودار $y=x^۳$ می‌بایستی ابتدا نمودار $y=x^۳$ را نسبت به محور $x$ها قرینه کنیم تا $y$ قرینه شده و به نمودار $y=-x^۳$ برسیم و در ادامه

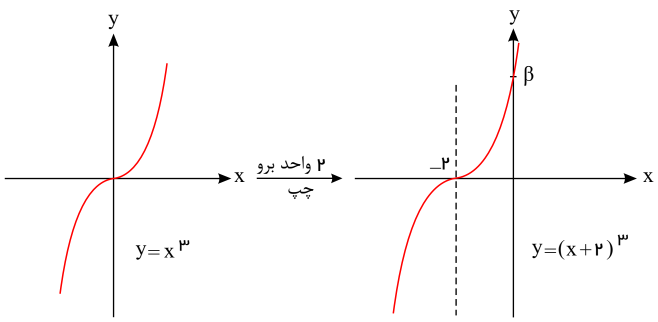
نمودار حاصل را ۲ واحد در راستای قائم به پایین انتقال دهیم تا بالاخره به نمودار $y=-x^3-2$ برسیم. داریم:




به نظر شما محل تلاقی این نمودار با محور $x$ها (یعنی $\alpha$) چه طولی دارد؟! آری در این نقطه $y=0$ بوده و داریم:

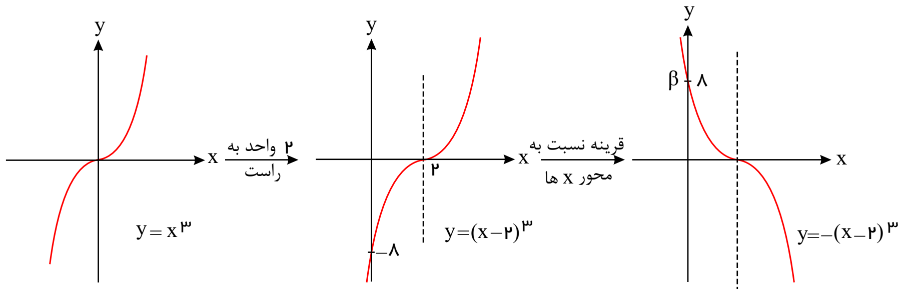
$$y=-x^3-2=0\to x^3=-2\xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{ریشهٔ سوم}}\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{-2}\to x=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}=\alpha$$

**ب** برای رسم نمودار $y=(x+2)^3$ کافی است نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد در راستای محور طول‌ها به سمت چپ انتقال دهیم (این موضوع را می‌توانید از محل تلاقی نمودار با محول طول‌ها نیز درک کنید: $y=(x+2)^3=0\to x=-2$ )




آیا شما هم موافقید که محل تلاقی این نمودار با محور $y$ها (یعنی $\beta$) به صورت $\beta=y(0)=(0+2)^3=8$ است؟!

**پ** خب دیگر، با توجه به دو مورد قبلی حتماً دریافته‌اید که برای رسم نمودار $y=-(x-2)^3$، ابتدا نمودار $y=(x-2)^3$ را با ۲ واحد انتقال به سمت راست دادن نمودار $y=x^3$ به دست آورده و سپس آن را نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-(x-2)^3$ حاصل شود:

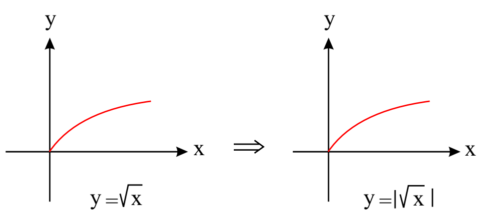



$$\beta=y(0)=-(0-2)^3=-(-8)=8$$

**۱۱** براساس تعریف به تابعی که صعودی یا نزولی باشد تابع یکنوا و به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد تابع اکیداً یکنوا می‌گویند.

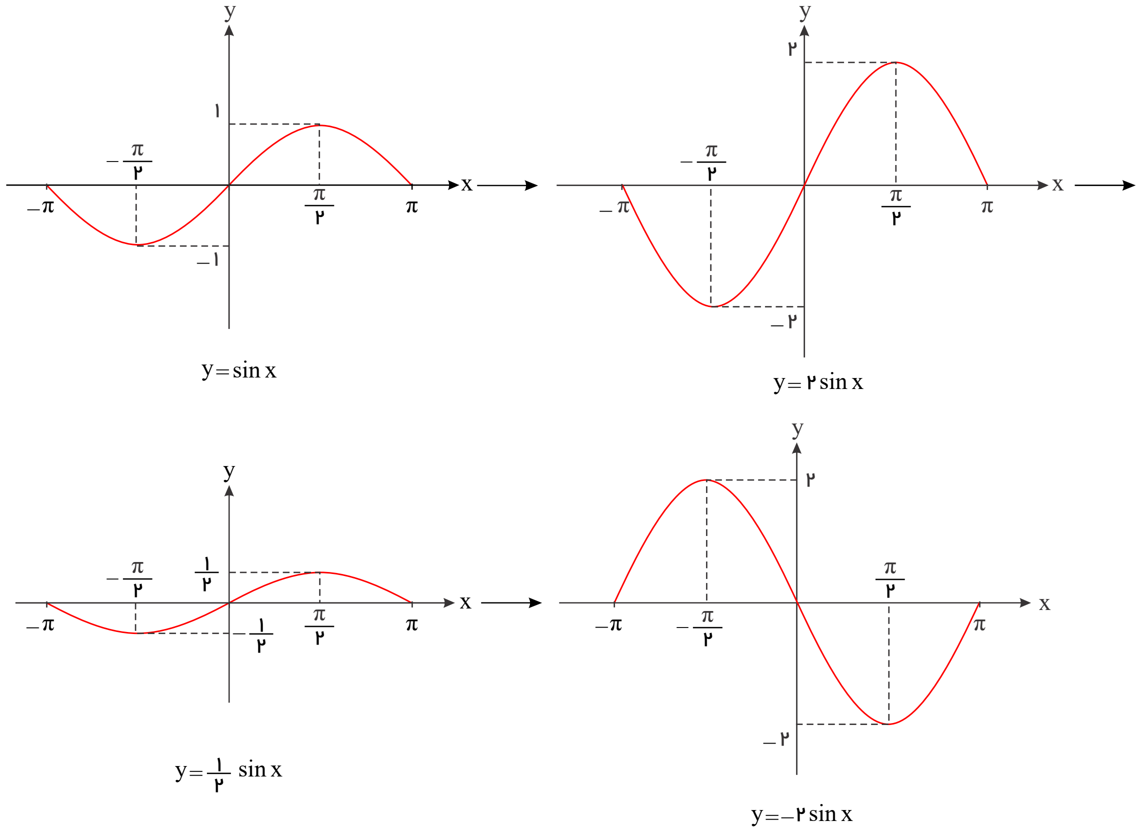
**۱۲** می‌دانیم که برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است آن قسمت از نمودار $f$ که در زیر محور $x$ها (یعنی در $y$های منفی) قرار دارد را حذف کرده و به‌جای آن قرینه‌اش نسبت به محور $x$ها را به باقی‌ماندهٔ نمودار (در بالای محور $x$ها) بیفزاییم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این‌جا نمودار $y=\sqrt{x}$ برای $y$های منفی تعریف نشده است و لذا نمودار $y=|\sqrt{x}|$ همان نمودار $y=\sqrt{x}$ است.

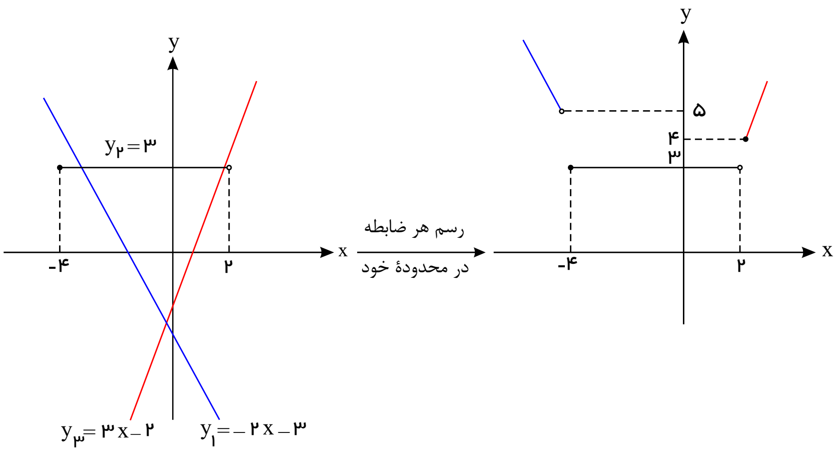



**۱۳** هر چهار نمودار $y=\sin x$، $y=2\sin x$، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ دامنه‌ای به صورت $[-\pi,\pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایهٔ $y=\sin x$، که فاصلهٔ بستهٔ $[-1,1]$ است، برد تابع $y=r\sin x$ برای $r>0$ به صورت $[-r,r]$ و برای $r<0$ به صورت $[r,-r]$ بوده و شکل نمودار برای $|r|>1$ کشیده‌تر و برای

$۰ < |r| < ۱$ بسته‌تر خواهد شد. حواستان باشد که برای $r$های منفی نمودار دقیقاً قرینه نمودار $y = |r| \sin x$ نسبت به محور $x$ها خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود:




**۱۴** رسم نمودار تابع $f$ به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:




می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty, -۴)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-۴, ۲)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty, ۲)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-۴, +\infty)$ صعودی است.

**۱۵** نمودار $y = x^۳$ ابتدا ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل شده است تا نمودار داده‌شده حاصل شود. پس داریم:

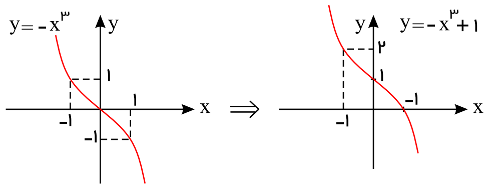
$$y = x^۳ \xrightarrow[x \to x+۳]{\text{۳ واحد به چپ}} y = (x+۳)^۳ \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y = (x+۳)^۳ + ۲$$

در مقایسه با تابع $y = (x+a)^۳ + b$ داریم:

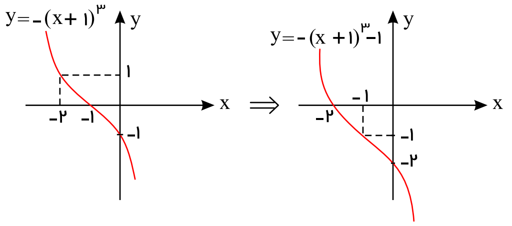
$a = ۳ \quad , \quad b = ۲$

**۱۶**

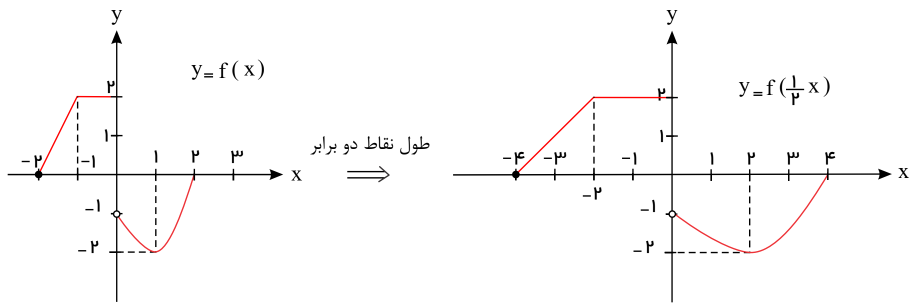
الف) برای رسم $y=-x^3+1$ باید $y=-x^3$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم.

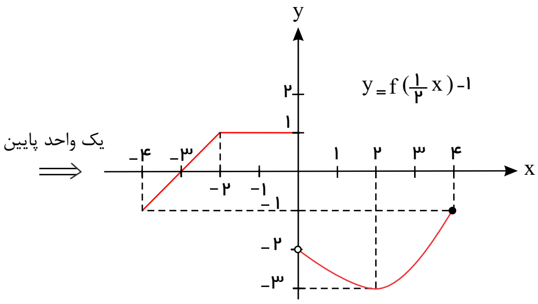



ب) برای رسم $y=-(x+1)^3-1$ باید $y=-x^3$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.



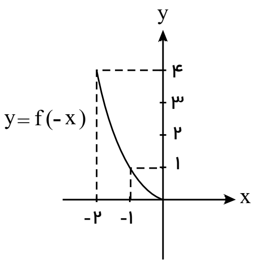

**۱۷** با توجه به اینکه برای رسم $y=f(x-1)$ باید $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، پس برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(x-1)$ باید نمودار $y=f(x-1)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم. پس داریم:



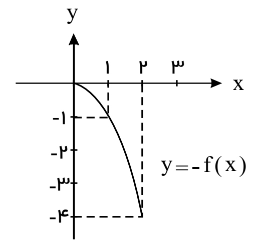




**۱۸**

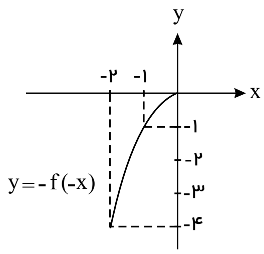
**الف** برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $y$ها قرینه کنیم.




**ب** برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $x$ها قرینه کنیم.




**پ** برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $x$ها و سپس نسبت به محور $y$ها قرینه کنیم که نتیجهٔ آن این است که نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.

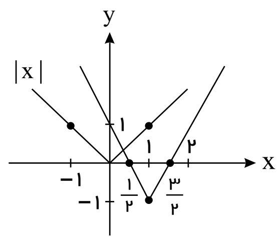



**۱۹** می‌دانیم که تغییرات روی طول برعکس است. پس از طول نقاط ۲ واحد کم، سپس تقسیم بر $-۲$ می‌کنیم تا $f(-۲x+۲)$ به‌دست بیاید، بعد عرض نقاط را یک واحد کم می‌کنیم، $f(-۲x+۲)-۱$ حاصل می‌شود.

$$(-۱,۱)\xrightarrow{(x-۲)}(-۳,۱)\xrightarrow{(x\div(-۲))}(\frac{۳}{۲},۱)\xrightarrow{(y-۱)}(\frac{۳}{۲},۰)$$

$$(۰,۰)\xrightarrow{(x-۲)}(-۲,۰)\xrightarrow{(x\div(-۲))}(۱,۰)\xrightarrow{y-۱}(۱,-۱)$$

$$(۱,۱)\xrightarrow{(x-۲)}(-۱,۱)\xrightarrow{(x\div(-۲))}(\frac{۱}{۲},۱)\xrightarrow{(y-۱)}(\frac{۱}{۲},۰)$$




**۲۰**

**الف** نادرست؛ برای مثال $f(x)=۵$ در $\mathbb{R}$ صعودی است ولی صعودی اکید نیست.