نام و نام خانوادگی:

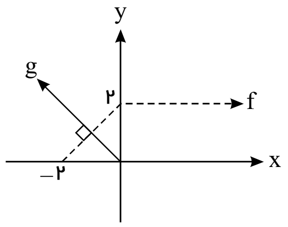
زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: تابع یازدهم تجربی (تستی)

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، برد تابع $f+۲g$ کدام است؟ (تابع f به‌صورت خط‌چین و تابع g با خط پر برای تمایز دو تابع رسم شده است.)



۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[۲,۴]$ ۳) $[۲,۵)$ ۴) $[-۲,۲]$

۲) اگر f و g توابعی وارون‌پذیر، با دامنه و برد $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم: $f^{-۱}(g(۴))=۵$ و $g^{-۱}(f^{-۱}(۳))=۴$ ؛ آن‌گاه $f(f(۵))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۳) تابع f در بازهٔ اعداد حقیقی اکیداً نزولی است. اگر $f(x-۳)\leq f(۳x+۷)$، آنگاه بزرگترین محدودهٔ x کدام است؟

۱) $x<-۵$ ۲) $x>-۵$ ۳) $x\leq -۵$ ۴) $x\geq -۵$

۴) اگر $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ باشد ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۳+۳x$ ۲) $x^۳-۳x$ ۳) $(x-۱)^۳$ ۴) $(x+۱)^۳$

۵) اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$، آن‌گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{۱+f^{-۱}of(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\infty,-۱]$ ۴) $(-\infty,۱]$

۶) اگر f تابعی نزولی و غیرثابت باشد که نمودار آن زیر محور xها قرار دارد، توابع $g(x)=۳x-f(x)$ و $h(x)=\frac{-۱}{f(-x)}$ به‌ترتیب چگونه هستند؟

۱) نزولی - نزولی ۲) صعودی - صعودی ۳) نزولی - صعودی ۴) صعودی - نزولی

۷) اگر $f(x)=g(۲x+۵)$ و $g^{-۱}(x)=\sqrt[۵]{۸x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۸) فرض کنید $f^{-۱}(x)=۶x+۲x^۳$ و $g^{-۱}(x)=ax^۳+bx$. اگر $f(۲x)=۳g(\frac{x}{۴})$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

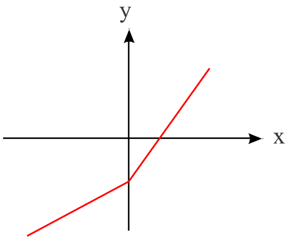
۹) به‌ازای چند مقدار m رابطهٔ $f=\{(۲,m^۳-m),(۳,m+۱),(m,۲),(۲,۰),(m^۲,۲m)\}$ تابعی یک‌به‌یک است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰) توابع $f=\{(-۱,۴),(۵,۱۱),(۹,-۲)\}$ و $g(x)=x+\sqrt{x+۱}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}og)(۲a)=۵$، a چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ با توجه به نمودار تابع $f^{-۱}$ (که در شکل مقابل رسم شده) نمودار تابع f از کدام ناحیه نخواهد گذشت؟



(۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

۱۲ اگر ضابطه تابع معکوس تابع $f\left(x\right)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ به‌صورت $f^{-۱}\left(x\right)=\sqrt[۳]{x-۱}+۳$ باشد، حاصل $a+b-c$ کدام است؟

(۱) ۴۶ (۲) ۴۵ (۳) ۴۴ (۴) ۴۷

۱۳ دو تابع $f\left(x\right)=\left\{\left(۲x\,,\,۴x^{۲}+۱\right)\,|x\in\mathbb{N}\,,\,x>۲\right\}$, $g\left(x\right)=\sqrt{۲x+۴}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-۱}of^{-۱}\left(a\right)=۴۸$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ۲۰۲ (۲) ۵۵٫۵ (۳) ۱۰۱ (۴) ۹۶

۱۴ با فرض $f(x)=\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt[۳]{x+a})$، حداقل مقدار تابع $g(x)=f^{-۱}(x)+۸x^{۳}$ برابر ۲٫۵ است. مقدار a کدام است؟

(۱) ۱٫۲۵ (۲) ۱٫۷۵ (۳) $-۲٫۷۵$ (۴) $-۲٫۲۵$

۱۵ برای کدام مقدار c، نقطهٔ $(-۲,۵)$ روی ضابطهٔ تابع وارون تابع $y=۲x^{۲}+۴x+۳c$ قرار می‌گیرد؟

(۱) ۲۴ (۲) -۲۴ (۳) $\frac{۵}{۳}$ (۴) $-\frac{۵}{۳}$

۱۶ تابع $f(x)=mx^{۲}-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟
$\{(m\,,\,n-۱)\,,\,(۰,k)\,,\,(n-۱,m^{۲}+۲m-۱)\,,\,(۳k+۲,۲k+۱)\}$

(۱) -۱ (۲) $-\sqrt{۵}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{۵}$

۱۷ اگر در تابع خطی f تساوی‌های $f(۲)=۱$ و $f(۲x-۱)=۲f(x)+۱$ برقرار باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۸ تابع $f(x)=ax+b$ با فرض $a\neq ۰$ و $b\neq ۰$ را در نظر بگیرید. اگر $f^{-۱}(x)=f(x)$ باشد، حاصل $f(-۲)$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۲ (۲) $-۲+b$ (۳) $۲+b$ (۴) گزینه ۱ و ۳

۱۹ اگر $x\in[a,b]$ و تابع $f=\{(۲,۲x+۵),(-۱,۱۱-x),(۰,x^{۲}-۲x+۵)\}$ صعودی باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۰ تابع $y=x^{۲}+ax-۳$ روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حدود a کدام است؟

(۱) $a\leq -۴$ (۲) $a\geq -۴$ (۳) $a\geq ۴$ (۴) $a\leq ۴$

پاسخنامه تشریحی

۱ ۴ ۳ **۲** ۱

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & , -۲\le x\le ۰ \\ ۲ & , ۰<x \end{cases} \quad , \quad g(x)=-x \ , \ x\le ۰$$

$g(x)$) یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و بر خط $y=x+۲$ عمود است، یعنی شیبش -۱ است.)

$$\text{دامنهٔ}: D_{f+۲g}=D_f\cap D_g=[-۲,+\infty)\cap(-\infty,۰]\to D_{f+۲g}=[-۲,۰]$$

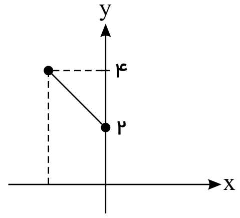
برای محاسبهٔ برد داریم:

$$(f+۲g)(x)=(x+۲)+۲(-x)=x+۲-۲x\Rightarrow(f+۲g)(x)=-x+۲$$

اکنون برد تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه محاسبه می‌کنیم:

$$(f+۲g)(-۲)=۴ \quad , \quad (f+۲g)(۰)=۲\to R_{f+۲g}=[۲,۴]$$

و شکل آن بدین صورت است:



۲ ۴ ۳ ۲ **۱** می‌دانیم که اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$f^{-۱}(g(۴))=۵\to f(۵)=g(۴) \ *$$

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۳))=۴\to g(۴)=f^{-۱}(۳)\to f(g(۴))=۳\overset{*}{\to} f(f(۵))=۳$$

۳ ۴ **۳** ۲ ۱ اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a)\le f(b)$، آنگاه $a\ge b$ است. پس داریم:

$$f(x-۳)\le f(۳x+۷)\Rightarrow x-۳\ge ۳x+۷\Rightarrow -۷-۳\ge ۳x-x\Rightarrow ۲x\le -۱۰\Rightarrow x\le -۵$$

۴ ۴ ۳ **۲** ۱

می‌دانیم: $\boxed{a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)}$

می‌توانیم در طرف دوم تساوی جمله‌ی $x+\frac{۱}{x}$ را ظاهر کنیم.

$$f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)\left(x\times\frac{۱}{x}\right)$$

$$f(t)=t^۳-۳t\Rightarrow f(x)=x^۳-۳x$$

۵ ۴ ۳ **۲** ۱

$$f(x)=\sqrt{۱-x}\Rightarrow D_f:۱-x\ge ۰\to x\le ۱$$

از طرفی می‌دانیم: $f^{-۱}of(x)=x \ , \ x\in D_f(x\le ۱)$

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$۱+f^{-۱}of(x)\ge ۰\to ۱+x\ge ۰\to x\ge -۱\xrightarrow{x\le ۱}-۱\le x\le ۱ \text{ یا } x\in[-۱,۱]$$

۶ ۴ ۳ **۲** ۱ یعنی مقادیر $f(x)$ منفی هستند، حال داریم:

$$\left.\begin{aligned} & x_۱<x_۲\xrightarrow{f\text{ نزولی}}f(x_۱)\ge f(x_۲)\xrightarrow{\times(-۱)}-f(x_۱)\le -f(x_۲) \\ & x_۱<x_۲\xrightarrow{\times ۳}۳x_۱<۳x_۲ \end{aligned}\right\}\Rightarrow ۳x_۱-f(x_۱)<۳x_۲-f(x_۲)\Rightarrow g(x_۱)<g(x_۲)$$

پس تابع g صعودی است.

$$x_۱<x_۲\Rightarrow -x_۱>-x_۲\xrightarrow{f\text{ نزولی}}f(-x_۱)\le f(-x_۲)\xrightarrow{f\text{ منفی است}}\frac{۱}{f(-x_۱)}\ge\frac{۱}{f(-x_۲)}\xrightarrow{\times(-۱)}\frac{-۱}{f(-x_۱)}\le\frac{-۱}{f(-x_۲)}\Rightarrow h(x_۱)\le h(x_۲)$$

تابع h نیز صعودی است.

۷ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم که $f(a)=b\to f^{-۱}(b)=a$ است.

اگر $f^{-۱}(۴)=a$ باشد، آن‌گاه داریم: $f(a)=۴$. حال مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$f(a)=g(۲a+۵)=۴\Rightarrow ۲a+۵=g^{-۱}(۴)\xrightarrow{g^{-۱}(۴)=\sqrt[۵]{۸\times ۴}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲}۲a+۵=۲\Rightarrow ۲a=-۳\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین: $a=f^{-۱}(۴)=-\frac{۳}{۲}$

۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴) فرض می‌کنیم $y=f(۲x)$ پس داریم:

$$f(۲x)=۳g(\frac{x}{۴})\Rightarrow ۳g(\frac{x}{۴})=y\Rightarrow g(\frac{x}{۴})=\frac{y}{۳}\Rightarrow \frac{x}{۴}=g^{-۱}(\frac{y}{۳})\Rightarrow x=۴g^{-۱}(\frac{y}{۳})\quad (۲)y=f(۲x)\Rightarrow ۲x=f^{-۱}(y)\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(y)\quad (۱)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۱}{۲}f^{-۱}(y)=۴g^{-۱}(\frac{y}{۳})\xrightarrow{y\to x}\frac{۱}{۲}f^{-۱}(x)=۴g^{-۱}(\frac{x}{۳})$$

از ضابطه‌های داده شده برای $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}(۶x+۲x^۳)=۴(a(\frac{x}{۳})^۳+b\frac{x}{۳})\Rightarrow ۳x+x^۳=\frac{۴a}{۲۷}x^۳+\frac{۴b}{۳}x$$

تساوی فوق به ازای هر x برقرار است پس:

$$\frac{۴a}{۲۷}=۱\Rightarrow a=\frac{۲۷}{۴},\frac{۴b}{۳}=۳\Rightarrow b=\frac{۹}{۴}$$
$$\Rightarrow a+b=\frac{۲۷}{۴}+\frac{۹}{۴}=\frac{۳۶}{۴}=۹$$

۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)** برای اینکه f تابع باشد، باید:

$$\begin{cases}(۲,m^۳-m)\in f\\(۲,۰)\in f\end{cases}\Rightarrow m^۳-m=۰\Rightarrow m(m^۲-۱)=۰\Rightarrow m=۰,m=\pm ۱$$

اگر $m=۰$ آنگاه:

$f,f=\{(۲,۰),(۳,۱),(۰,۲),(۰,۰)\}\Rightarrow$ تابع نیست

اگر $m=۱$ آنگاه:

$f,f=\{(۲,۰),(۳,۲),(۱,۲)\}\Rightarrow$ تابعی یک‌به‌یک نیست

اگر $m=-۱$ آنگاه:

$f,f=\{(۲,۰),(۳,۰),(-۱,۲),(۱,-۲)\}\Rightarrow$ تابعی یک‌به‌یک نیست

پس هیچ مقدار mای وجود ندارد که f تابعی یک‌به‌یک باشد.

۱۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴) با در نظر گرفتن روابط فوق داریم:

$$(f^{-۱}og)(۲a)=۵\Rightarrow f^{-۱}(g(۲a))=۵\Rightarrow f(۵)=g(۲a)$$

با توجه به توابع f و g مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$g(۲a)=f(۵)=۱۱\Rightarrow ۲a+\sqrt{۲a+۱}=۱۱\quad (۱)$$

برای حل معادلهٔ بالا از تغییر متغیر $\sqrt{۲a+۱}=t$ استفاده می‌کنیم، بدیهی است که t مثبت است.

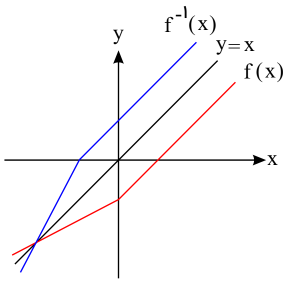
$$۲a+۱=t^۲\Rightarrow ۲a=t^۲-۱\xrightarrow{(۱)}t^۲-۱+t-۱۱=۰\Rightarrow t^۲+t-۱۲=۰$$
$$(t-۳)(t+۴)=۰\xrightarrow{t>۰}t=\sqrt{۲a+۱}=۳\Rightarrow a=۴$$

فقط یک مقدار برای a وجود دارد.

۱۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

قرینهٔ نمودار را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل $f^{-۱}(x)$ از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



۱۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴) تابع معکوس تابع $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+۳$ همان تابع $f(x)$ است، پس داریم:

$$y=\sqrt[۳]{x-۱}+۳\Rightarrow \sqrt[۳]{x-۱}=y-۳\Rightarrow x-۱=(y-۳)^۳\Rightarrow x=۱+(y-۳)^۳$$

$$\Rightarrow y=f(x)=۱+(x-۳)^۳=۱+x^۳-۹x^۲+۲۷x-۲۷$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۳-۹x^۲+۲۷x-۲۶=x^۳+ax^۲+bx+c$$

$$\Rightarrow a=-۹\ ,\ b=۲۷\ ,\ c=-۲۶\Rightarrow a+b-c=-۹+۲۷+۲۶=۴۴$$

۱۳ ۴ **۳** ۲ ۱ با توجه به $f(x)$ ابتدا می‌توان ضابطهٔ آن را به دست آورد:

$$f(x)=x^۲+۱$$
$$D_f=\{۶,۸,۱۰,\cdots\}$$
$$g^{-۱}of^{-۱}(a)=۴۸\Rightarrow f^{-۱}(a)=g(۴۸)=۱۰$$
$$\Rightarrow a=f(۱۰)=۱۰۱$$

۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱ اگر جای x و y را در تابع $y=f(x)$ عوض کنیم، تابع وارون به‌دست می‌آید.

برای محاسبهٔ وارون f، جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt[۳]{y+a})\Rightarrow ۲x-۱=-\sqrt[۳]{y+a}\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=(۱-۲x)^۳-a$$

ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f^{-۱}(x)+۸x^۳=۱-۶x+۱۲x^۲-۸x^۳-a+۸x^۳=۱۲x^۲-۶x+۱-a$$

حداکثر یا حداقل مقدار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ برابر است با $-\frac{\Delta}{۴a}$.

$$g_{min}=-\frac{\Delta}{۴\times ۱۲}=-\frac{۳۶-۴۸+۴۸a}{۴۸}=-a+\frac{۱}{۴}=۲/۵\Rightarrow a=-۲/۲۵$$

۱۵ ۴ ۳ **۲** ۱ اگر نقطهٔ (a,b) روی $f^{-۱}$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ای که باید روی f قرار بگیره (b,a) است یعنی اگر $(a,b)\in f^{-۱}$ آن‌گاه $(b,a)\in f$. در این جا داریم:

$$\begin{cases} f(x)=۲x^۲+۴x+۳c \\ (-۲,۵)\in f^{-۱}\end{cases}\xrightarrow{(۵,-۲)\in f}-۲=۲(۵)^۲+۴(۵)+۳c$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}}-۲=۷۰+۳c\rightarrow ۳c=-۷۲\rightarrow c=-۲۴$$

۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱ تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است، پس:

$$f(x)=mx^۲-nx-k=\text{ثابت}\Rightarrow m=n=۰\ ,\ f(x)=-k$$

مجموعهٔ داده‌شده در صورتی تابع است که:

$$(\underbrace{m}_{۰}\ ,\ n-۱)=(۰\ ,k)\Rightarrow k=n-۱=-۱$$

پس $f(x)=۱$ و در نتیجه $f(\sqrt{۵})=۱$.

۱۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$f(x)=ax+b$$
$$f(۲x-۱)=۲f(x)+۱=f(۱)=۲f(۱)+۱\Rightarrow f(۱)=-۱$$

حال با استفاده از این‌که $f(۲)=۱$ و $f(۱)=-۱$، داریم:

$$\begin{cases}۲a+b=۱\\ a+b=-۱\end{cases}\Rightarrow a=۲,b=-۳$$
$$\Rightarrow f(x)=۲x-۳\Rightarrow f(-۱)=-۵$$

۱۸ ۴ **۳** ۲ ۱ برای به‌دست آوردن $f^{-۱}(x)$ به جای $f(x)$ قرار می‌دهیم y و معادله x برحسب y را به دست می‌آوریم و در رابطه به دست آمده به جای x قرار می‌دهیم $f^{-۱}(x)$ و به جای y قرار می‌دهیم x.

$$y=ax+b\rightarrow x=\frac{y-b}{a}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$$

حال سؤال می‌گوید $f^{-۱}(x)=f(x)$ پس:

$$\frac{x-b}{a}=ax+b$$

این رابطه قرار است به ازای هر xای برقرار باشد. پس ناچار هستیم که ضریب x از دو طرف را با هم برابر قرار دهیم و مقدار ثابت دو طرف را هم با هم برابر قرار دهیم.

$$\begin{cases}\frac{۱}{a}=a\rightarrow a^۲=۱\rightarrow a=\pm۱\\ -\frac{b}{a}=b\rightarrow a=-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}a=-۱\rightarrow f(x)=-x+b$$

در اینجا به یک نکته دقت می‌کنیم. اگر $b=۰$ باشد آن‌گاه در معادلهٔ $-\frac{b}{a}=b$ الزامی ندارد نتیجه بگیریم $a=-۱$ پس اگر $b=۰$ باشد آن‌گاه $a=\pm۱$ اما اگر $b\neq۰$ باشد تنها داریم $a=-۱$ پس تابع $f(x)$ می‌تواند به این حالات باشد:

$$f(x)=\begin{cases} x \to f(-۲)=-۲ & (b=۰)\\ -x \to f(-۲)=۲ & (b=۰)\\ -x+b(b\neq ۰)\to f(-۲)=۲+b & (b\neq ۰)\end{cases}$$

۱۹) ۴ **۳** ۲ ۱

$$f=\{(۲,۲x+۵),(-۱,۱۱-x),(۰,x^۲-۲x+۵)\}\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & -۱ & ۰ & ۲\\ \hline y & ۱۱-x & x^۲-۲x+۵ & ۲x+۵\end{array}$$

با توجه به صعودی بودن f داریم:

$$۱۱-x\leq x^۲-۲x+۵\leq ۲x+۵$$

برای حل نامعادلهٔ فوق، دو نامعادلهٔ زیر را حل کرده و جواب‌های آنها را اشتراک می‌گیریم:

$$x^۲-۲x+۵\geq ۱۱-x\Rightarrow x^۲-x-۶\geq ۰\Rightarrow (x-۳)(x+۲)\geq ۰\Rightarrow \boxed{x\geq ۳ \text{ یا } x\leq -۲}\quad (۱)$$

$$x^۲-۲x+۵\leq ۲x+۵\Rightarrow x^۲-۴x\leq ۰\Rightarrow x(x-۴)\leq ۰\Rightarrow \boxed{۰\leq x\leq ۴}\quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) به‌صورت زیر است:

$$(۱)\cap(۲): ۳\leq x\leq ۴\Rightarrow x\in[۳,۴]$$

در بازهٔ $[a,b]$ چون بیشترین مقدار $b-a$ را می‌خواهیم، پس $a=۳$ و $b=۴$ را در نظر می‌گیریم:

$$\max(b-a)=۴-۳=۱$$

۲۰) ۴ ۳ **۲** ۱

برای اینکه سهمی روی بازه $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، لازم است که طول رأس سهمی در بازهٔ $(۲,+\infty)$ قرار نگیرد:

$$x_S=-\frac{a}{۲}\leq ۲\Rightarrow a\geq -۴$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۲
۲	۱
۳	۳
۴	۲
۵	۲
۶	۲
۷	۴
۸	۳
۹	۴
۱۰	۲
۱۱	۴
۱۲	۳
۱۳	۳
۱۴	۴
۱۵	۲
۱۶	۳
۱۷	۱
۱۸	۳
۱۹	۳
۲۰	۲