نام و نام خانوادگی: | زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: فصل سوم ریاضی ۱۱ تجربی

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.

۲) تابع $f=\{(۲,۳m-۱۰),(۰,m),(۴,-m+۲)\}$ اکیداً نزولی است، حدود m را بیابید.

۳) اگر $\log(۲x-۳)\le\log(x+۱)$، حدود x را به دست آورید.

۴) اگر تابع f اکیداً صعودی و تابع g اکیداً نزولی باشد با فرض اینکه تابع fog تعریف‌شده می‌باشد، ثابت کنید fog اکیداً نزولی است.

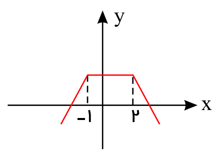
۵) تحقیق کنید تابع مقابل یک به یک است و سپس ضابطهٔ تابع معکوس آن را بنویسید.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

۶) اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۳x)f(x)}$$

۷) نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مشخص کنید در کدام فاصله تابع صعودی و در کدام فاصله تابع نزولی است؟



۸) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز می‌باشد.

۹) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.

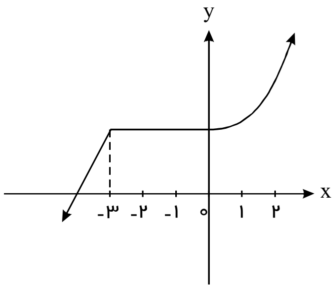
الف) نمودار تابع $f(x)=x^۳$ در بازه $(۰,۱)$ .... از نمودار تابع $g(x)=x^۲$ قرار دارد. (بالاتر ـ پایین‌تر)

۱۰) برای تابع وارون‌پذیر f، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ چه زمانی باهم برابر می‌شوند؟

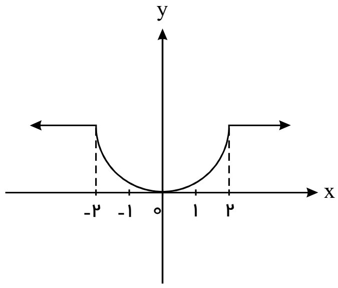
۱۱) باتوجه به ماشین $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to x$، اگر $f(x)=\frac{۵x+۶}{۲x-۱}$ و تابع g معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $g(a)=۳$، مقدار a را به‌دست آورید.

۱۲) ضابطهٔ تابع $y=(f^{-۱}og^{-۱})(x)$ را با فرض $(gof)(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌دست آورید.

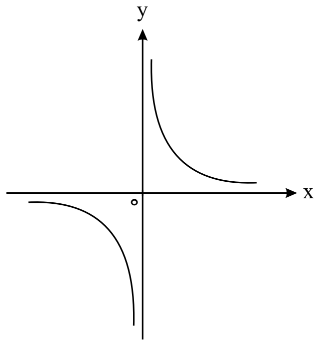
۱۳ نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y = f(x)$



$y = g(x)$



$y = h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

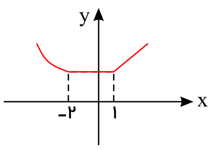
۱۴ توابع f و g هردو اکیداً صعودی هستند و تابع fog تعریف شده است. ثابت کنید fog اکیداً صعودی است.

۱۵ اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x - ۳|) - f(|x + ۲|)}$$

۱۶ اگر تابع $f = \{(-۱, ۴m) , (-۳, m) , (۲, ۳m + ۲)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را بیابید.

۱۷ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مشخص کنید تابع در کدام فاصله اکیداً صعودی و در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



۱۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف. تابع $f(x) = \dfrac{۱}{x - ۱}$ در تمام دامنهٔ خود یکنواست.

ب. تابع $f(x) = [x]$ تابعی ثابت است.

۱۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف هر تابع یکنوای اکیدی، یک‌به‌یک است.

ب تابع $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x$ در $\mathbb{R}$ صعودی است.

۲۰ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف اگر $f = \{(۲ , ۳) , (۳ , ۵)\}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر .... است.

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$$g^{-1}of^{-1}(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=4$$

$$\text{علت:}\begin{cases} f^{-1}(5)=\alpha\to f(\alpha)=5\to \frac{1}{8}\alpha-3=5\to\frac{1}{8}\alpha=8\to\alpha=64\\ g^{-1}(64)=\beta\to g(\beta)=64\to\beta^3=64\to\beta=4\end{cases}$$

۲

$$f=\{(2,3m-10),(0,m),(4,-m+2)\}$$

اعضای دامنهٔ تابع را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$0<2<4\xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}}f(0)>f(2)>f(4)\Rightarrow m>3m-10>-m+2$$

$$\left.\begin{cases}3m-10<m\Rightarrow 2m<10\Rightarrow m<5\\ 3m-10>-m+2\Rightarrow 4m>12\Rightarrow m>3\end{cases}\right\}\to 3<m<5$$

۳

$$\log(x+1)\le\log(2x-3)\xrightarrow{\text{با توجه به اکیداً صعودی بودن}}x+1\le 2x-3\Rightarrow x\ge 4$$

۴ برای هر x_1 و x_2 از دامنهٔ fog داریم:

$$x_1<x_2\xrightarrow{g\ \text{اکیداً نزولی}}g(x_1)>g(x_2)\xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی}}f(g(x_1))>f(g(x_2))$$

$x_1<x_2\Rightarrow(fog)(x_1)>(fog)(x_2)\Rightarrow$ fog اکیداً نزولی است.

۵

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}\Rightarrow x_1\sqrt{x_2^2+1}=x_2\sqrt{x_1^2+1}$$

تابع یک به یک است. $\Rightarrow x_1^2(x_2^2+1)=x_2^2(x_1^2+1)\Rightarrow x_1^2x_2^2+x_1^2=x_2^2x_1^2+x_2^2\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ دو طرف را به توان **۲** می‌رسانیم. $(*)$ **توجه کنید**

چون دو کسر با هم مساوی‌اند و مخرج دو کسر علامت مثبت دارد پس صورت‌ها با هم، هم علامت هستند.

برای یافتن ضابطه تابع معکوس قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow \text{دو طرف به توان ۲}$$

$$y^2=\frac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow y^2x^2+y^2=x^2\Rightarrow y^2x^2-x^2=-y^2\Rightarrow x^2(y^2-1)=-y^2\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}\Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$ x و y هم علامت‌اند

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

۶

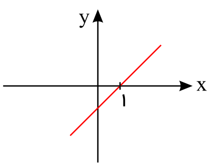
$$g(x)=\sqrt{(x^2-3x)f(x)}\Rightarrow(x^2-3x)f(x)\ge 0$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1)=0$ است، داریم:

برای $x<1$ **تابع** f **منفی است.** $x<1\Rightarrow f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0\Rightarrow$

برای $x>1$ **تابع** f **مثبت است.** $x>1\Rightarrow f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow$

به‌طور تقریبی نمودار f **به‌صورت مقابل است.**



$$x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=3$$

x		0		1		3	
x^2-3x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x^2-3x)f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 0 \le x \le 1$ یا $x \ge 3 \Rightarrow D_g = [0,1] \cup [3,+\infty)$

۷

$(-\infty, 2] \to$ تابع صعودی $\qquad [-1,+\infty) \to$ تابع نزولی

توجه کنید تابع در بازهٔ $(-\infty,-1]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۸

الف) درست

۹

الف) پایین‌تر

۱۰ در نگاه اول ممکن است باتوجه به وجود روابط $fof^{-1}(x) = x$ و $f^{-1}of(x) = x$ تصور کنیم که توابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ به‌دلیل همانی بودن، همواره باهم برابرند که البته تصور غلطی است. حقیقت در دامنهٔ این توابع نهان است.

$D_{fof^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1}(x) \in D_f\}$, $D_{f^{-1}of} = \{x \in D_f | f(x) \in D_{f^{-1}}\}$

با دقت روی این دامنه‌ها درمی‌یابیم در رابطهٔ $fof^{-1}(x) = x$، x از دامنهٔ f^{-1} (به‌شرطی‌که $f^{-1}(x)$ متعلق به دامنهٔ f باشد) انتخاب می‌شود و درحالی‌که در رابطهٔ $f^{-1}of(x) = x$، x از دامنهٔ f (با این شرط که $f(x) \in D_{f^{-1}}$ است) انتخاب می‌شود. پس اگر دامنه و برد تابع وارون‌پذیر f باهم برابر باشند ($D_f = R_f$) توابع ترکیب fof^{-1} و $f^{-1}of$ نیز باهم برابر می‌شوند.

به‌عبارت دیگر اگر تابع f همانی باشد، تابع‌های fof^{-1} و $f^{-1}of$ باهم برابر خواهند بود. مثلاً برای $f = \{(1,1),(2,2),(0,0)\}$ داریم:

$f^{-1} = \{(1,1),(2,2),(0,0)\} \to fof^{-1} = f^{-1}of = \{(1,1),(2,2),(0,0)\}$

۱۱ ابتدا دقت کنید که ماشین $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$ به این معناست که $gof(x) = x$ است. (زیرا طبق این ماشین تابع f، x را به $f(x)$ و تابع g، $f(x)$ را به x تبدیل می‌کند.)

بنابراین باتوجه به معکوس‌پذیر بودن تابع g، تابع‌های f و g وارون یکدیگر بوده و داریم:

$$\begin{cases} gof(3) = 3 \\ g(a) = 3 \end{cases} \to \begin{cases} g(f(3)) = 3 \\ g(a) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع } b \text{، یک‌به‌یک است.}} f(3) = a \xrightarrow{\text{باتوجه به ضابطهٔ } f} a = f(3) = \frac{5(3)+6}{2(3)-1} = \frac{21}{5}$$

۱۲ ضابطهٔ تابع $(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x) = y$ مدنظر بوده و با فرض $h(x) = (gof)(x) = \sqrt[3]{x}$، ضابطهٔ $y = h^{-1}(x)$ هدف مسأله می‌باشد. برای دست‌یابی به معکوس $h(x)$ کافی است از رابطهٔ $y = \sqrt[3]{x}$، x را برحسب y بیابیم:

$$y = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم.}} y^3 = x \to y = h^{-1}(x) = x^3$$

۱۳

الف) صعودی $\Leftarrow (-\infty, 0]$, اکیداً صعودی $\Leftarrow (-\infty,-3]$

صعودی $\Leftarrow \mathbb{R}$, اکیداً صعودی $\Leftarrow [0,+\infty)$, صعودی $\Leftarrow [-3,+\infty)$

ب) اکیداً نزولی $\Leftarrow [-2, 0]$, نزولی $\Leftarrow (\infty, 0]$

پ) تابع h در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۱۴ برای هر x_1 و x_2 از دامنهٔ fog داریم:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2) \Rightarrow fog \text{ اکیداً صعودی}$$

۱۵ نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a) \le f(b)$ آنگاه $a \ge b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-3|) - f(|x+2|)} \Rightarrow f(|x-3|) - f(|x+2|) \ge 0$$

$$\Rightarrow f(|x-3|) \ge f(|x+2|) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x-3| \le |x+2|$$

$$(x-3)^2 \le (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \le x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 9 - 4 \le 4x + 6x$$

$$\Rightarrow 10x \ge 5 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

۱۶

$f = \{(-1, 4m), (-3, m), (2, 3m+2)\}$

اعضای دامنه را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$-3 < -1 < 2 \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(-3) < f(-1) < f(2) \Rightarrow m < 4m < 3m+2$$

$$\begin{cases} m < 4m \Rightarrow 3m > 0 \Rightarrow m > 0 \ (1) \\ 4m < 3m + 2 \Rightarrow m < 2 \ (2) \end{cases}$$

$(1) \cap (2) \Rightarrow 0 < m < 2$

۱۷

$(-\infty, -2] \to$ اکیداً نزولی $\qquad [1, +\infty) \to$ اکیداً صعودی

۱۸ الف. نادرست – در شاخه‌های خود یکنواست.

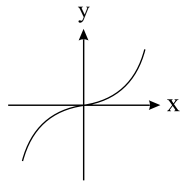
ب. نادرست – صعودی است.

۱۹

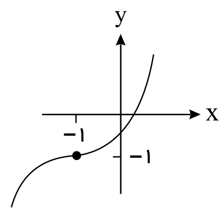
الف درست

ب درست- $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ - ۱ = (x+۱)^۳ - ۱$

با توجه به شکل تابع $x^۳$ کافی است $x^۳$ یعنی



را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم.



که با توجه به شکل تابع صعودی اکید و درنتیجه، صعودی است.

۲۰

الف ۲