



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه



نام آزمون: آمار و احتمال ۱۱ ریاضی فصل ۱

تشریحی
تاریخ آزمون:

۱ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها را ثابت کنید.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

۲ با کمک جدول ارزشی، درستی رابطه $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ را نشان دهید. (قانون دمورگان)

۳ درستی هریک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

ج) $(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C) \Rightarrow B = C$

۴ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید. به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست شوند.

ب) $5 + \square \notin \mathbb{Z}$

الف) $-7 \times \square = -7$

ت) $\frac{10 \times 9}{3} \square 5 \times 3$

پ) $\frac{8 \times \square}{4} \in \left\{ 2, \frac{1}{3} \right\}$

ج) $1 \square \{1\}$

ث) $\square \times \sqrt{2} = 0$

ح) $7(\square - 3) = 35$

چ) $5(\square - 3) = 20$

۵ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مجموعه مرجع U داریم $A - B \subseteq A$

۶ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای \forall, \exists بنویسید و ارزش هر کدام را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$

پ) همه عددهای اول فردند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم: $x^3 = x$

۷ با فرض $A \cup B = B \cup A$ ثابت کنید $A \cap B = B \cap A$

۸ درستی یا نادرستی تساوی‌های زیر را با کمک نمودار ون مشخص کنید.

۱) $A - B = A \cap B'$

۲) $A - B = B' - A'$

۳) $A - B = A - (A \cup B)$

۴) $A - B = A - (A \cap B)$

۹ تساوی‌های زیر را به کمک روش عضوگیری ثابت کنید.

۱) $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

۲) $A - B = B' - A'$



۱۰ اگر $U = \{x \in Z, |x + 2| \leq 4\}$ و $A = \{x \in U, 2x + 4 < 7\}$ و $B = \{x \in U, x - 1 \geq 1\}$ و $C = \{x \in U, -1 \leq x < 2\}$ باشند. درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۲) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۱۱ درستی یا نادرستی تساوی‌های زیر را معلوم کنید.

۱) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

۵) $\{a\} \in \{\{a, b\}, c\}$

۲) $\emptyset \not\subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

۶) $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset, \{\emptyset, 1\}\}$

۳) $x \in \{\{x\}, -1\}$

۷) $\{2, -1\} \in \{1, 2, \{-1, 2\}\}$

۴) $\{a, b\} \subseteq \{b, a, \{a\}\}$

۸) $\{1, 2, y\} \subseteq \{y, 2, 1\}$

۱۲ مجموعه‌های A و B و C را به گونه‌ای تعریف کنید که: $A \in B$ $B \in C$ $A \subset C$

۱۳ اگر p و q دو گزاره باشند ثابت کنید $p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$ (جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌ها را رسم کنید).

۱۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) عدد x فرد یا اول است.

ب) عدد صفر زوج و نامنفی است.

۱۵ دامنه متغیر گزاره $\frac{2}{x-2} = 3$ را بیان کنید.

۱۶ اگر مجموعه $A \times A$ دارای ۲۵ عضو باشد و $(1, -1)$ ، $(2, 0)$ ، $(4, 0)$ سه عضو $A \times A$ باشند مجموعه A را بیابید. سپس مجموعه توانی A را بنویسید.

۱۷ اگر $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ باشد، $A_1 \times A_2$ را با رسم نمودار نشان دهید.

۱۸ گزاره (مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است) را با نماد ریاضی بیان کرده و ارزش آن را تعیین کنید.

دامنه متغیر گزاره $\frac{5}{x-1} = 1$ را بیان کنید.

۱۹ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

ب

$$A - B = B' - A'$$

۲۰ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخنامه تشریحی

۱

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

۲

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

↑
مقایسه می شود برابر هستند

۳

$$\text{الف) } \left\{ \begin{array}{l} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup A' \subseteq X \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U \subseteq X \\ X \subseteq U \end{array} \right\} \Rightarrow U = X$$

درست است.

$$\text{ب) } (A - B) \cup (A \cap B) = \underbrace{(A \cap B')}_{\text{توزیع پذیری}} \cup (A \cap B) = A \cap \underbrace{(B \cup B')}_{U} = A$$

درست است.

$$\text{ب) } (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \xrightarrow{\text{از سمت چپ به راست}}$$

$$(A - C) \cap (B - C) = \underbrace{(A \cap C') \cap (B \cap C')}_{\text{شرکت پذیری}} = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

درست است.

$$\text{ت) } (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\underbrace{(A \cap B')}_{\text{توزیع پذیری}} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{A \cup B} = \underbrace{[(A \cap B') \cup B]}_{A \cup B} \cap \underbrace{[(A \cap B') \cup A']}_{B' \cup A'}$$

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A') = A \cup B - (B' \cup A')' = (A \cup B) - (A \cap B)$$

درست است.

$$\text{ت) } \underbrace{(A \cup B) \cap (A' \cap B')}_{\text{شرکت پذیری}} = \underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{\text{توزیع پذیری}} \cap B' = \underbrace{[(A' \cap A) \cup (A' \cap B)]}_{\emptyset} \cap B' = \underbrace{A' \cap B}_{\emptyset}$$

$$= \underbrace{(A' \cap B) \cap B'}_{\text{شرکت پذیری}} = \underbrace{(B' \cap B) \cap A'}_{\emptyset} = \emptyset$$

درست است.

ج) نادرست است زیرا اگر $A = B = \emptyset$ و $C = \{1\}$ در نظر بگیریم در شرایط صدق می کند اما $B \neq C$ می باشد.

۴

$$\square = \sqrt{2} \quad \text{ب)}$$

یا هر عدد گنگ دیگر

$$\frac{10 \times 9}{3} > 5 \times 3 \quad \text{ت)}$$

$$1 \in \{1\} \quad \text{ج)}$$

$$7(\square - 3) = 35 \quad \text{ح)}$$

$$-7 \times \square = -7 \quad \text{الف)}$$

$$\frac{8 \times \square}{4} \in \left\{ 2, \frac{1}{3} \right\} \quad \text{پ)}$$

$$\square \times \sqrt{2} = 0 \quad \text{ث)}$$

$$5(\square - 3) = 20 \quad \text{ج)}$$

۵

اگر ثابت کنیم $(A - B) \cup A = A$ یعنی ثابت کرده ایم $A - B \subseteq A$



$$(A - B) \cup A = \underbrace{(A \cap B') \cup A}_\text{قانون جذب} = A \Rightarrow A - B \subseteq A$$

الف) $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \underbrace{E}_{\text{مجموعه زوج}}) \vee (x \in \underbrace{O}_{\text{مجموعه فرد}})$ درست

ب) $\exists a \in \mathbb{W}; a^2 < 0 \rightarrow$ نادرست

پ) $\forall x \in P; x \in O \rightarrow$ نادرست (عدد ۲ زوج است)

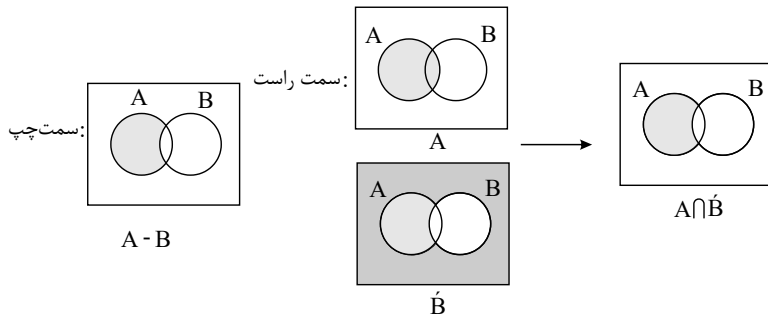
ت) $\exists x \in \mathbb{N}; 1 - 2x > 5 \rightarrow$ نادرست

ث) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0; x + \frac{1}{x} \geq 2$ (اگر $x = -1$) نادرست

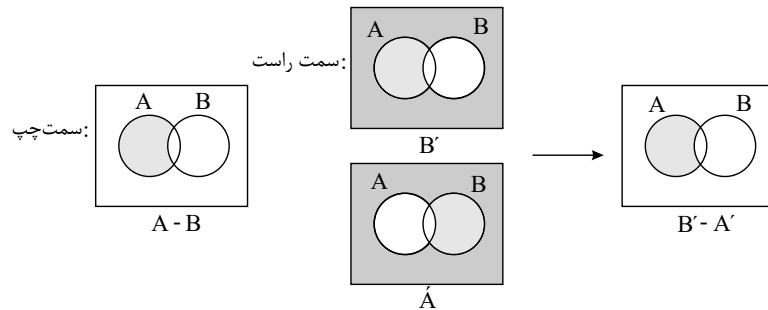
ج) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = x$ ($x = 1$) درست

$$A \cap B = ((A \cap B)')' = (A' \cup B')' \rightarrow (B' \cup A')' = B \cap A$$

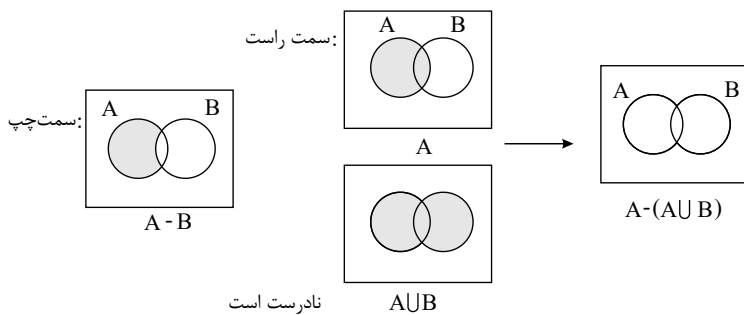
۱) $A - B = A \cap B'$ ✓



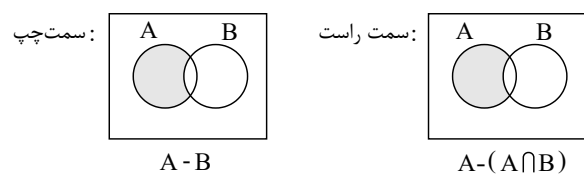
۲) $A - B = B' - A'$ ✓



۳) $A - B = A - (A \cup B)$ ×



۴) $A - B = A - (A \cap B)$ ✓





$$1) x \in A \rightarrow x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B} x \in B \rightarrow A \subset B$$

$$2) A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\Rightarrow \{x \in B' \wedge x \notin A'\} = B' - A'$$

$$U = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \quad -4 \leq x + 2 \leq 4$$

$$A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\} \quad -6 \leq x \leq 2$$

$$2x < 3 \rightarrow x < \frac{3}{2} \quad B = \{2\} \rightarrow x \leq 2 \quad C = \{-1, 0, 1\}$$

$$1) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \Rightarrow \underbrace{A \cap \{2\}}_{\emptyset} \stackrel{?}{=} \underbrace{\{2\} \cap C}_{\emptyset} \quad \checkmark$$

$$B \cap C = \{\}$$

$$A \cap B = \{\}$$

$$2) \underbrace{A \cup \{2, -1, 0, 1\}}_{\cup} \stackrel{?}{=} \underbrace{\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \cup C}_{\cup} \quad \checkmark$$

$$B \cup C = \{2, -1, 0, 1\}$$

$$A \cup B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$1) \checkmark \quad 2) \text{ غ} \quad 3) \text{ غ} \quad 4) \checkmark$$

$$5) \text{ غ} \quad 6) \checkmark \quad 7) \checkmark \quad 8) \checkmark$$

$$A = \{1\}$$

$$B = \{\{1\}, 5\} \quad C = \{1, \{\{1\}, 5\}, 6\}$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

۱۴ الف) عدد x : فرد نیست و اول نیست.

ب) عدد صفر زوج نیست یا منفی است.

$$2 = 3x - 6 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3} \quad \text{عر} = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$

$$D = R - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$n(A \times A) = 25 \rightarrow n(A) = 5$$

$$A = \{4, 0, 2, 1, -1\}$$

$$n(p(A)) = 2^5 = 32$$

$$p(A) =$$

$$\{\emptyset, \{4\}, \{0\}, \{2\}, \{1\}, \{-1\}, \{4, 0\}, \{4, 2\}, \{4, 1\}, \{4, -1\}, \{4, 0, 2\}, \{4, 0, 1\}, \{4, 0, -1\}, \{0, 2\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}, \dots\}$$

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

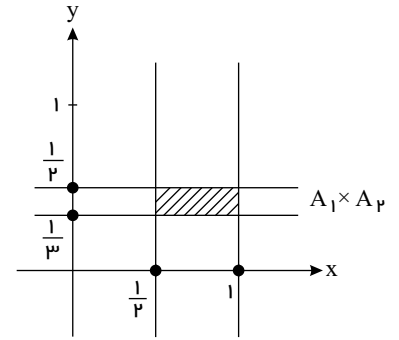
۱۶

۱۷



$$A_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad A_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

$$A_1 \times A_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$



این گزاره درست است. $\forall x \in \mathbb{R} : x^x \geq 0$ (۱۸)

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

(۱۹)

الف

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)'$$

$$= (A \cup B) \cap (B' \cap C')$$

$$[(A \cup B) \cap B'] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

ب

$$A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$$

$$2^n - 2^{n-2} = 384 \Rightarrow 2^{n-2} \underbrace{(4 - 1)}_{\neq} = 384$$

$$2^{n-2} = 128 = 2^7 \rightarrow n - 2 = 7 \rightarrow n = 9$$

$$A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } \Rightarrow 2^9 = 512$$

تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه‌ای n عضوی 2^n است. (۲۰)