



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه



نام آزمون: امار و احتمال یازدهم ریاضی فصل ۲

تشریحی
تاریخ آزمون:

۱ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم. سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۲ اگر A و B دو پیشامد با $\frac{1}{3}P(A) = \frac{1}{4}P(B) = \frac{1}{5}P(A \cap B)$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ آیا این دو پیشامد مستقل‌اند. چرا؟

۳ اگر $\frac{3}{5}P(A|B) = \frac{2}{4}P(B|A) = \frac{1}{5}P(A)$ باشد $P(B)$ را به دست آورید.

۴ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهی‌نامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهی‌نامه تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۵ ستاد مرکزی معاینه فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال پرکارترین سال در عرصه معاینه فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه فنی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود...» در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).



شماره مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از خودروهای مراجعه کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

۶ احتمال آنکه شاگرد اول سال آخر رشته ریاضی در دبیرستانی در کنکور قبول شود ۸٪ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در این دبیرستان احتمال اینکه او در این دبیرستان شاگرد اول شود و هم کنکور قبول شود را به دست آورید. (احتمال شاگرد اول شدن علی قطعی است.)

۷ اعداد ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی ۶ مهره یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم. با چه احتمالی مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ است؟

۸ جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه، جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو از یک رنگ نباشند چقدر است؟

۹ احتمال اینکه دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود ۵۵٪ و احتمال اینکه در درس شیمی قبول شود ۶٪ است. اگر احتمال اینکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۷۵٪ باشد با چه احتمالی در هر دو درس قبول می‌شود؟

۱۰ یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره ظاهر شده ۲ باشد چقدر است؟

۱۱ تاسی را ۳ بار می‌اندازیم. با چه احتمالی هیچ دو عددی مثل هم نیستند؟

۱۲ دو ظرف داریم که در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه داریم. از ظرف اول یک مهره برداشته، بدون نگاه کردن در ظرف دوم می‌اندازیم، آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره خارج می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

ب) اگر این مهره سفید باشد با کدام احتمال مهره از ظرف اول بوده است؟



۱۳) در گروه زنان ساکن روستا ۵۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۳۰ درصد از آنها مهارت قالی بافی را دارند. اگر یک زن از این گروه انتخاب شود. احتمال اینکه این زن هم تحصیل کرده باشد و هم مهارت قالی بافی داشته باشد، چقدر است؟

۱۴) اگر فضای نمونه‌ای S از پیشامدهای ساده a, b, c, d, e تشکیل شده باشد. $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{3}$ باشد مطلوب است محاسبه $P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$

۱۵) احتمال اعتصاب کارگران کارخانه‌ای ۲۰ درصد و احتمال تولید به موقع در صورت اعتصاب کارگران ۵۰ درصد است و در کل به احتمال ۸۰ درصد به موقع کار تمام می‌شود.

الف) احتمال تولید به موقع و اعتصاب کارگران

ب) اگر تولید به موقع باشد، احتمال آنکه کارگران اعتصاب کرده باشند.

۱۶) دو مهره متوالیاً و بدون جای گذاری از جعبه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه خارج می‌کنیم. با چه احتمال مهره اول سفید و مهره دوم سیاه است؟

۱۷) در پرتاب دو تاس احتمال آنکه هر دو تاس بین ۲ و ۵ ظاهر شوند چقدر است؟

۱۸) در یک مسابقه ورزشی سه فرد a و b و c با هم مسابقه می‌دهند. اگر شانس برد فرد a دو برابر b و شانس c نصف b باشد چقدر احتمال دارد فرد a یا c ببرد؟

۱۹) مریم، سارا و شیرین برای سکونت در شهری که ۴ هتل مختلف به نام‌های الماس، شاهین، شاندیز و قصر است مسافرت کرده‌اند، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) سه نفر در سه هتل مختلف سکونت داشته باشند.

ب) هتل الماس همواره مسافر نداشته باشد.

۲۰) یک تاس را به هوا پرتاب کرده‌ایم، پیشامدهای زیر رخ داده است. برای هر پیشامد یک تعریف ارائه کنید.

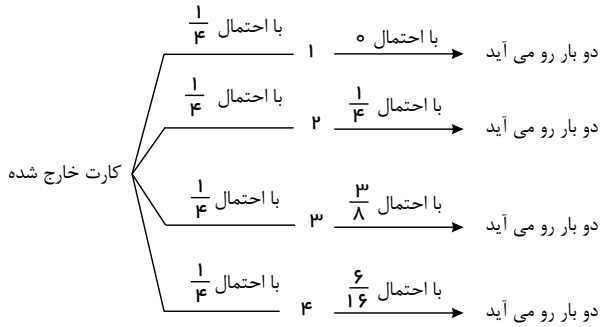
$$(1) A = \{1, 2, 3\}$$

$$(2) B = \{2, 4, 6\}$$

$$(3) C = \{\}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{دو بار آمدن}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{16} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} \right)$$

$$P(\text{دو بار آمدن}) = \frac{1}{4}$$

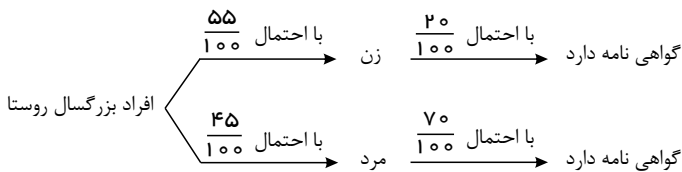
$$P(\text{دو بار رو آمدن} \mid \text{خارج شدن شماره ۳}) = \frac{P(\text{دو بار آمدن} \cap \text{خارج شدن شماره ۳})}{P(\text{دو بار رو آمدن})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$

۲ خیر، چرا که $P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$ و این دو با هم برابر نیستند.

۳ طبق قاعده بیز

$$\underbrace{P(A|B)}_{\frac{1}{2}} P(B) = \underbrace{P(B|A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

۴ طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{گواهی نامه داشتن فرد انتخابی}) = \frac{20}{100} \times \frac{55}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{110 + 315}{1000} = \frac{425}{1000}$$

۵ الف

$A =$ پیشامد مردود بودن خودرو

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28 + 16 + 12 + 17 + 26 + 10 + 14 + 14 + 29 + 30 + 22 + 22 + 18}{870} = \frac{258}{870}$$

ب) فضای نمونه کاهش یافته و ۷۹ هزار خودرو می شود.

$$P(A) = \frac{26}{79}$$

ب) فضای نمونه همه خودروهای مردودی ($n(s)$) برابر ۲۵۸ هزار خودرو است و تعداد خودروهای مردودی که به مرکز ۵ مراجعه کردند برابر ۲۶ هزار خودرو است. بنابراین:

$$P(A) = \frac{26}{258}$$

پیشامد قطعی $\longrightarrow P(A) = 1$



$$B = \text{پیشامد قبول شدن در کنکور} \rightarrow P(B|A) = 0,8$$

طبق ضرب احتمال

$$\rightarrow P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_1 \cdot \underbrace{P(B|A)}_{0,8} = 0,8$$

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

$$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (6, 3), (4, 5)\} \rightarrow n(A) = 5$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{سفید و } B \text{ سفید } A) + P(\text{سیاه } B \text{ و سفید } A) = P(A \text{ سفید } B) + P(A \text{ سیاه } B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{12}{50} + \frac{12}{50} = \frac{24}{50} = 0,48$$

$$P(A \cap B) = P(\text{قبولی در هر دو درس})$$

$$= P(\text{فیزیک}) + P(\text{شیمی}) - P(\text{هر دو درس})$$

$$\Rightarrow 0,75 = 0,55 + 0,6 - P(\text{قبولی در هر دو درس}) \Rightarrow P(\text{قبولی در هر دو درس}) = 0,4$$

۷

۸

۹

۱۰ در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای عبارت است از: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ولی با توجه به گفته سوال می‌دانیم که تاس مورد بررسی ما ۳ یا ۶ ظاهر نشده است. یعنی فضای نمونه‌ای به فضای $\{1, 2, 4, 5\}$ کاهش یافته. بنابراین احتمال ظاهر شدن ۲ برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۱ احتمال مطلوب ما در مورد تاس اول $1 = \frac{6}{6}$ است. زیرا هرکدام از ۶ عدد ظاهر شود مشکلی پیش نخواهد آمد در مورد تاس دوم احتمال موردنظر ما برابر $\frac{5}{6}$ است. چون به هر حال در

تاس اول یک عدد ظاهر شده و ما می‌خواهیم عدد تاس دوم و تاس اول مانند هم نباشند. به دلیل مشابه احتمال موردنظر ما در تاس سوم $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ است. پس به طور کلی احتمال اینکه هیچ دو عدد مثل هم نباشند برابر است با:

$$P = \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

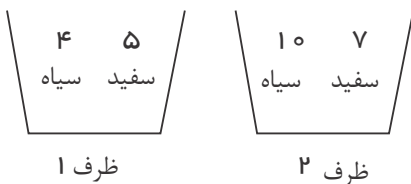
روش دوم:

$$n(A) = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$n(S) = 6^3 = 216$$

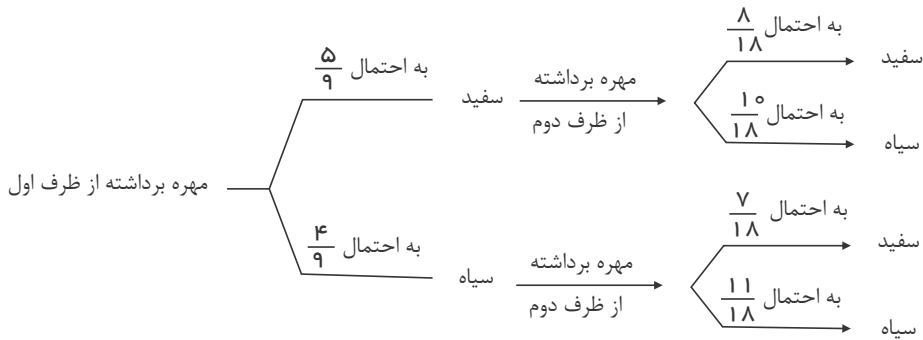
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

۱۲ الف



$A =$ پیشامد سفید بودن

$$B = \text{پیشامد مهره برداشته شده از ظرف دوم همان مهره ظرف اول باشد} \rightarrow P(B) = \frac{1}{18}$$



ب)

$$P(A) = \frac{4}{18} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{18} \times \frac{4}{9} = \frac{68}{162}$$

$$P(B|A) = \frac{\overbrace{\frac{1}{18} \times \frac{5}{9}}^{P(A \cap B)}}{\underbrace{\frac{68}{162}}_{P(A)}} = \frac{5}{68}$$

۱۳) فرضیات مسئله را به صورت زیر کدگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \text{پیشامد تحصیل کرده بودن زنان} & \rightarrow P(A) &= 0,5 \\ B &= \text{پیشامد مهارت قالب‌بافی داشتن زنان} & \rightarrow P(B|A) &= 0,3 \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \cancel{P(A)} \cdot P(B|A) = 0,15$$

۱۴) طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c, d\} \cap \{a, b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{P(\{b, c\})}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{رابطه ۱}$$

$$\underbrace{P(\{a, b, c\})}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{P(\{a\})}_{\frac{1}{4}} + P(\{b\}) + P(\{c\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(b) + P(c) = \frac{1}{4}$$

$$P(b) + P(c) = P(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{جای‌گذاری در رابطه ۱} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

۱۵) الف)

$$\left. \begin{aligned} A &= \text{پیشامد اعتصاب کارگران} \\ B &= \text{پیشامد تولید به‌موقع} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} P(A) &= 0,2 \\ P(B|A) &= 0,5 \\ P(B) &= 0,8 \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \text{ضرب احتمال} \overbrace{P(A)}^{0,2} \cdot \overbrace{P(B|A)}^{0,5} = 0,1 \text{ درصد یا } 0,1$$

$$\text{طبق قاعدهٔ بیز} = \underbrace{P(A)}_{0,2} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{0,5} = \underbrace{P(B)}_{0,8} \cdot P(A|B) \rightarrow P(A|B) = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{مهرة اول سفید} | \text{مهرة دوم سیاه}) = P(\text{مهرة اول سفید}) \times P(\text{مهرة دوم سیاه} | \text{مهرة اول سفید})$$

$$= \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} \times \frac{\binom{6}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

ج)

۱۶)



۱۷) کل حالت‌ها برابر $n(S) = ۳۶$ است.

می‌خواهیم اعداد تاس‌ها بین ۲ و ۵ باشند یعنی رقم هر تاس ۳ یا ۴ باشد. پس:

$$A = \{(۳, ۳), (۳, ۴), (۴, ۳), (۴, ۴)\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

$$P(b) = T \quad P(a) = ۲P(b)$$

$$P(a) = ۲T, \quad P(c) = \frac{1}{۲}T \quad P(c) = \frac{1}{۲}P(b)$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = ۱ \rightarrow T + ۲T + \frac{1}{۲}T = ۱ \rightarrow \frac{۷}{۲}T = ۱ \rightarrow T = \frac{۲}{۷}$$

$$P(a) = \frac{۴}{۷} \quad P(c) = \frac{1}{۷} \quad P(b) = \frac{۲}{۷}$$

$$P\{(a, c)\} = P(a) + P(c) = \frac{1}{۷} + \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

۱۹)

A = پیشامد درسه هتل مختلف بودن سه نفر

B = پیشامد مسافر نداشتن هتل الماس

$$\text{انتخاب هتل} = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{۴ \times ۳ \times ۲}{۴^۳} = \frac{۲۴}{۴^۳}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{۳ \times ۳ \times ۳}{۴^۳} = \frac{۲۷}{۴^۳}$$

۲۰)

۱) یک عدد کمتر از ۴ رخ دهد.

۲) اعداد زوج رخ دهند.

۳) عددی بزرگ‌تر از ۶ رخ دهد.