



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: آمار و احتمال ۱۱ ریاضی فصل ۴ تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به اندازه ۲۴ بگیریم و چند بر فراوانی بافت نگاهت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل نشان دهنده میانگین جامعه است، که در اینجا میانگین نمرات همه دانش‌آموزان است، که مجهول است. حال فرض کنید که برای ۱۰۰ نمونه ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازه اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کرده‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آنها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان دهنده میانگین نمونه و پاره‌خط‌های افقی آبی معرف فاصله اطمینان مربوطه‌اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

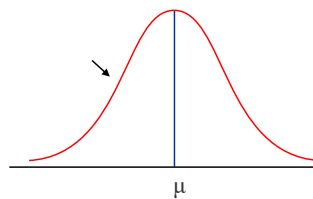
الف) اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟

ب) چند درصد از ۲۰ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند؟

پ) اگر ۱۰۰ پاره‌خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آنها خط سیاه را قطع نکند؟

ت) نتیجه این تمرین تعبیر یک بازه اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم ۱۰۰ بازه اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم از آنها پارامتر میانگین جامعه را در بر گیرند.

چند بر بافت نگاهت فراوانی میانگین‌ها



۲) نوع روش نمونه‌گیری مناسب‌تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت وارد کننده خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آنها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند.

ب) مدیر مدرسه ۶۰ نفری می‌خواهد نظر دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بر اساس یک نمونه ۱۲ تایی بداند.

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر ۶ پایه با هم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش‌آموزان در پایه‌های مختلف).

۳) کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.

سن همه دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه دهم.

تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

۴) آیا در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ چرا؟ احتمال انتخاب خوشه‌ها چطور؟ آیا این روش نمونه‌گیری احتمالی است؟

۵) اگر مساحت زیر نمودار مستطیلی ۴۸ باشد، اگر دو داده به داده‌های دسته وسط اضافه شوند، مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی چه تغییری می‌کند؟ (طول هر دسته $c = 3$)

۶) اگر تعداد نمونه را برای بدست آوردن نسبت افراد و دوشغله به کل جامعه ۴۰۰ برابر کنیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای درصد این افراد چه تغییری می‌کند؟





۷) به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید.

- ۱) به ویژگی مورد مطالعه توسط ما روی نمونه چه می‌گویند؟
- ۲) به مجموعه‌ای از اعداد، ارقام، اطلاعات چه می‌گویند؟
- ۳) ویژگی که به تمام اعضای نمونه می‌توان نسبت داد؟
- ۴) دو دسته متغیر کیفی را نام ببرید.

۸) سرشماری را تعریف و مشکلات سرشماری را بیان کنید؟

۹) نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- | | |
|----------------------------|----------------|
| ۱) نام ماه تولد | ۵) گروه خونی |
| ۲) رشته تحصیلی در دبیرستان | ۶) قد |
| ۳) میزان تحطیلات | ۷) مراحل زندگی |
| ۴) مراحل کشت گیاه | |

۱۰) در آزمون کنکور انحراف معیار درصدهای درس ریاضی ۱۵ می‌باشد. اگر یک نمونه ۴۰۰ نفری انتخاب کنیم و میانگین این ۱۵ نفر ۹ درصد باشد، میانگین کل شرکت کنندگان با اطمینان ۹۵ درصد در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱۱) ما حداکثر ۱۰۰۰۰ پرسش‌نامه در دست داریم و می‌خواهیم یک بازه با اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه بدست آوریم. تفاضل حداکثر و حداقل طول این بازه چقدر است؟ ($\sigma = 8$)

۱۲) درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

- الف) با افزایش حجم نمونه، انحراف معیار برآورد کاهش می‌یابد.
- ب) با کاهش حجم نمونه، خطای کم‌تری برای برآورد میانگین داریم.
- ج) با افزایش نمونه، برآورد دقیق‌تری از پارامتر برآورد شده داریم.
- د) هر قدر انحراف معیار برآورد کمتر، آن برآورد بهتر است.

۱۳) در یک جامعه آماری ۵ عضوی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ چقدر احتمال دارد میانگین برآورد شده توسط نمونه‌های سه عضوی برابر میانگین واقعی باشد؟

۱۴) یک نمونه ۲ عضوی از مجموعه $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که میانگین برآورد شده با میانگین اصلی برابر باشد؟

۱۵) در مدرسه‌ای ۲۰۰ دانش‌آموز با شماره‌های ۱ تا ۲۰۰ داریم. می‌خواهیم ۱۰ نفر به عنوان نمونه به روش سیستماتیک انتخاب کنیم.

الف) احتمال انتخاب شدن نفر ۲۱ با نفر ۲۹ به طور همزمان چقدر است؟

ب) احتمال انتخاب شدن نفر ۳۳ و نفر ۴۳ و نفر ۶۳ چقدر است؟

۱۶) یک نمونه ۶۴ عددی از سیب‌های یک انبار برداشتیم و مشاهده کردیم انحراف معیار وزن سیب‌ها از هم به اندازه ۱۵ گرم است انحراف معیار میانگین برآورد شده وزن سیب‌های انبار چقدر است؟

۱۷) مزایای نمونه‌گیری نسبت به سرشماری را بیان کنید.

۱۸) اگر موضوع مورد سؤال سن پدران دانش‌آموزان دبیرستان رشد باشد. جامعه ما چیست؟

۱۹) جامعه آماری چیست؟

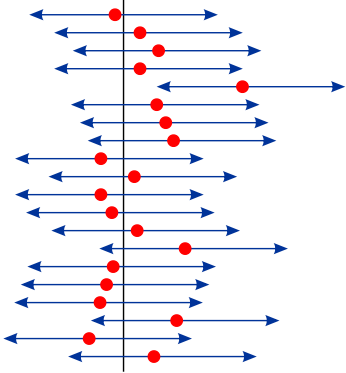
۲۰) یک کارخانه لامپ‌سازی می‌خواهد یک بازه با اطمینان ۹۵ درصد از درصد لامپ‌های معیوبش بدست آورد. برای این منظور یک نمونه‌ی ۱۰ تایی انتخاب کرد و مشاهده کرد ۲ تا معیوب هستند. این بازه را مشخص کنید.



پاسخنامه تشریحی

۱

- (الف) درون بازه اطمینان ۹۵ درصدی مربوط به این ۲۴ نمونه میانگین قرار ندارد. که به احتمال ۵ درصد این اتفاق می افتد یعنی در ۵ درصد نمونه‌ها خط آبی پاره خط سیاه را قطع نمی کند.
 (ب) از ۲۰ پاره خط فقط یکی قطع نکرده یعنی $\frac{1}{20}$ (۵ درصد) داده‌ها خط سیاه را قطع نکردند.
 (پ) انتظار می رفت ۵ درصد آن‌ها یعنی ۵ پاره خط سیاه را قطع نمی کرد.
 (ت) تا از آن‌ها در برگیرنده میانگین خواهند بود.



بازه های اطمینان ۹۵ درصد
برای نمونه های مختلف

۲

- (الف) نمونه گیری تصادفی ساده
 (ب) نمونه گیری طبقه ای
 (پ) نمونه گیری سیستماتیک یا سامانمند

۳

- (الف) پرسشنامه: چرا که مراجعات به بانک خیلی زیاد نبوده و با مشاهده دادگان و یا مصاحبه بدست آوردن اطلاعات امکان پذیر نیست.
 (ب) دادگان: معمولاً اطلاعات مربوط به هر دانش آموز در پرونده دانش آموز می باشد.
 (پ) مشاهده: می توانیم با مشاهده نمونه ای از ماشین ۴ اطلاعات را ثبت کنیم.

۴

- (ب) بله: چرا که احتمال انتخاب تمام خوشه ها یکسان هستند و این روش جزء روش های نمونه گیری احتمالی است چرا که خوشه ها تماماً به صورت تصادفی انتخاب می شوند و در نتیجه هر واحد آماری به صورت تصادفی انتخاب می شود و هر واحد آماری احتمالی معلوم برای انتخاب شدن دارند.

۵

مساحت زیر نمودار مستطیلی با مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی با هم برابر می باشند؛ مساحت زیر نمودار مستطیلی جدید برابر است با:

$$48 + 3 \times 2 = 48 + 6 = 54$$

↓
داده افزایش یافته

پس مساحت چندبر فراوانی جدید نیز ۵۴ می شود.

۶

- (۶) اگر تعداد داده ها $k\%$ برابر شود طول بازه ۹۵ درصد $\frac{1}{\sqrt{k}}$ برابر می شود. یعنی $\frac{1}{\sqrt{400}}$ برابر یعنی $\frac{1}{20}$ برابر می شود.

۷

- ۱ - متغیر ۲ - آمار ۳ - آماره ۴ - اسمی - ترتیبی

۸

- (۸) اگر موضوع مورد مطالعه ما روی تمام اعضای جامعه باشد. یعنی اندازه نمونه ما اندازه جامعه باشد سرشماری اتفاق افتاده است و از مشکلات سرشماری می توان:
 (۱) وقت گیر بودن برای دسترسی به تمام اعضا
 (۲) گران تمام شدن
 (۳) در دسترس نبودن تمامی اعضا
 (۴) از بین رفتن و تغییر اعضای جامعه به دلیل طولانی شدن.

۹

- (۱) کیفی - اسمی
 (۲) کیفی - اسمی
 (۳) کیفی - ترتیبی
 (۴) کیفی - ترتیبی

۱۰

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 9 - \frac{2 \times 15}{20} < \mu < 9 + \frac{2 \times 15}{20}$$

میانگین درصد ریاضی

$$\mu \in (7,5, 10,5)$$

با اطمینان ۹۵ درصد

۱۱



$$\text{طول بازه} = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

وقتی تمام ۱۰۰۰۰ پرسش‌نامه را استفاده کنیم، $0,32 = \frac{4 \times 8}{\sqrt{10000}} = \frac{32}{100}$

بیشترین طول بازه $\Rightarrow \frac{4 \times 8}{\sqrt{1}} = 32$

$$n = 1$$

$$\text{تفاضل} \Rightarrow 32 - 0,32 = 31,68$$

۱۲ الف) درست

ب) نادرست

ج) درست

د) نادرست

۱۳

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

میانگین واقعی جامعه

نمونه‌های سه عضوی که مجموعشان ۹ است $\{ \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\} \}$

که احتمال انتخاب هر زیر مجموعه ۳ عضو $\frac{1}{10} = \frac{1}{\binom{5}{3}}$ است، پس احتمال انتخاب دو نمونه سه عضوی برابر با $\frac{2}{10}$ است.

۱۴

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = \frac{3 \times 14}{6} = 7$$

میانگین اصلی جامعه

تمام زوج‌هایی که مجموع ۱۴ می‌دهند یعنی میانگینشان ۷ است. $\{ \{2, 12\}, \{4, 10\}, \{6, 8\} \}$

احتمال اتفاق افتادن هر زوج برابر است با $\frac{1}{15} = \frac{1}{\binom{6}{2}}$ ولی برای سه زوج این احتمال $\frac{3}{15}$ می‌شود.

۱۵ چون نمونه‌گیری ما سیستماتیک است $20 = \frac{200}{10}$ یعنی هر دسته شامل ۲۰ عضو می‌باشد و ما از هر دسته ۱ عضو برداشته و شماره عضو دسته دیگر از شماره عضو قبلی به علاوه ۲۰ تشکیل می‌شود.

الف) ما از هر دسته ۱ عضو برمی‌داریم و چون ۲۱ و ۲۹ با هم در یک دسته هستند، احتمال انتخاب این دو به عنوان نمونه در روش سیستماتیک وجود ندارد.

ب) اگر نفر سوم انتخاب شود قطعاً نفر ۱۴ام و ۱۶ام هم انتخاب می‌شوند.

$$\text{احتمال انتخاب شدن نفر سوم} = \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$$

تعداد اعضای هر دسته

۱۶ زمانی که به انحراف معیار خود داده‌ها را نمی‌دهند. همان انحراف معیار نمونه را برای جامعه در نظر می‌گیریم.

$$\sigma = 15 \rightarrow 6\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{15}{\sqrt{64}} = \frac{15}{8} = 1,875 \text{ گرم}$$

۱۷ کاهش هزینه‌ها - در دسترس نبودن همه در سرشماری - افزایش سرعت و دقت.

غیر عملی بودن سرشماری در بسیاری از موارد.

۱۸ دانش آموزان دبیرستان رشد.

۱۹ مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که موضوع مورد مطالعه هستند.

۲۰

$$p = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$\text{بازده اطمینان} = \left(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \text{ و } \left(p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

۹۵ درصدی برای p

$$\left(0,2 - 2\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{10}} \right) \text{ و } \left(0,2 + 2\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{10}} \right) = (0 \text{ و } 0,45)$$

عدد منفی $\approx 0,45$