



۱) فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم. سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۲) با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۳) یک مثال برای آماره و پارامتر برای دانش‌آموزان سال یازدهم در درس آمار و احتمال ارائه دهید.

۴) در دوازده داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۵) در دسته‌بندی ۱۴۰ داده آماری در ۱۵ طبقه، دسته اول به صورت $5 \leq x < 9$ می‌باشد، مرکز دسته دوازدهم کدام است؟

۶) در جدول زیر مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است. در این نمودار دایره‌ای زاویه مربوط به بازه $[25, 28]$ چند درجه است؟

مرکز دسته	۱۷٫۵	۲۰٫۵	۲۳٫۵	۲۶٫۵	۲۹٫۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰٫۵	۲۲	x	۱۸

۷) در مجموعه اعداد $\{1043, 1039, x, 1040, 1044, 1051, 1053\}$ به ازای کدام مقدار x شاخص‌های میانگین، مد و میانه باهم برابر است؟ (داده‌ها صعودی مرتب شده‌اند)

۸) از لیست یک کلاس دو نفر انتخاب می‌شوند. اگر هر دو متولد مهرماه باشند، با چه احتمالی روز تولد آنها در این ماه متفاوت است؟

۹) قرار است طی ۶ روز کاری هفته، ۴ نفر به شرکتی مراجعه کنند. با کدام احتمال حداقل دو نفر آنها در یک روز به شرکت مراجعه می‌کنند؟

۱۰) کیسه‌ای شامل ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. اگر ۴ مهره به تصادف از کیسه خارج شود، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) ۳ مهره سفید و یک مهره سیاه انتخاب شود.

ب) هر چهار مهره هم‌رنگ باشند.

۱۱) بر روی هریک از چند کارت یکسان، اعداد ۳ رقمی حاصل از جای‌گشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته‌ایم. به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشد؟

۱۲) یک سکه را دست‌کم چند بار پرتاب کنیم تا احتمال وقوع دست‌کم ۱ خط بیشتر از ۰٫۹۷ باشد؟

۱۳) فرزند اول خانواده‌ای دختر است. با چه احتمالی دو فرزند دیگر این خانواده پسر است؟

۱۴) در کیسه‌ای ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سبز وجود دارد. ۳ مهره به صورت متوالی بدون جای‌گذاری از این ظرف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مهره‌ها به ترتیب آبی، قرمز و سبز خواهند بود؟

۱۵) ۳ عدد تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد روشده مضرب ۳ نیستند؟

۱۶) فرض کنید A و B و C سه پیشامد باشند.

الف) عبارت مجموعه‌ای برای «پیشامد A و پیشامد B اتفاق بیفتد ولی برای C نیفتد» را بنویسید.

ب) پیشامد A و B هر دو با هم اتفاق بیفتد را روی نمودار ون نمایش دهید.

۱۷) دو کیسه داریم که در کیسه اول ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه و در کیسه دوم ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای را از آن بیرون می‌کشیم اگر مهره انتخاب شده سفید باشد احتمال این را که مهره متعلق به کیسه اول باشد را محاسبه کنید.

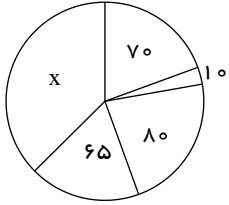


۱۸) اگر $M = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 15\}$ و $A = \{x \in M | 3 \leq x + 2 < 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 9\}$ و $C = \{x \in M, |x| < 3\}$ آنگاه درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $A - B = A \cap B'$

۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۳) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$



۱۹) در نمودار دایره‌ای مقابل دسته‌ای با زاویه x چند درصد کل جامعه است؟

۲۰) درستی تساوی‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

۱) $(A - B) \cup (A \cup B)' = B'$

۲) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

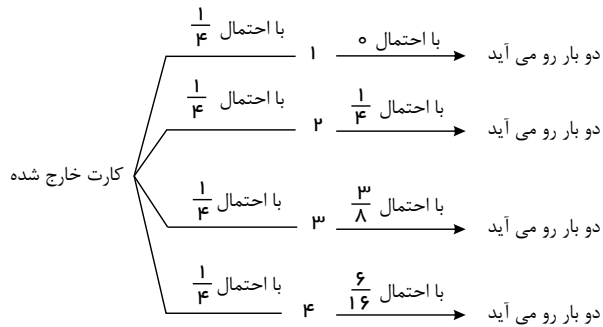
۳) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$



پاسخنامه تشریحی

۱

طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{دو بار آمدن}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{16} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} \right)$$

$$P(\text{دو بار آمدن}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{دو بار رو آمدن} \mid \text{خارج شدن شماره ۳}) = \frac{P(\text{دو بار آمدن} \cap \text{خارج شدن شماره ۳})}{P(\text{دو بار رو آمدن})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$

۲ به روش عضوگیری اثبات می کنیم.

الف) $x \in (A \cap B) = \underbrace{x \in A \wedge x \in B}_{\text{جابه جایی}} = x \in B \wedge x \in A$

$$= x \in (B \cap A) \Rightarrow A \cap B = B \cap A$$

ب) $x \in (A \cap (B \cap C)) = x \in A \wedge x \in (B \cap C) = \underbrace{((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C))}_{\text{جابه جایی}}$

$$((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C) = x \in (A \cap B) \wedge (x \in C) = x \in ((A \cap B) \cap C)$$

پ) $x \in (A \cap (B \cup C)) = \underbrace{(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))}_{\text{توزیع پذیری}}$

$$= ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) = (x \in (A \cap B)) \vee (x \in (A \cap C))$$

$$= x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

۳ برای مثال پارامتر این جامعه را می توانیم میانگین نمره درس آمار و احتمال در نظر بگیریم که می توانیم این ویژگی را به همه نسبت دهیم ولی آماره می تواند میانگین نمره در یک نمونه اختیاری باشد، پارامتر همواره ثابت است ولی آماره می تواند با توجه به نمونه تغییر کند.

۴

$$\text{میانگین داده ها} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{12}}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{12}^2}{12} - \bar{x}^2 = \frac{480}{12} - 6^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۵ با توجه به دسته اول $5 \leq x < 9$ می باشد طول دسته یا $C = 9 - 5 = 4$ و مرکز دسته برابر $x_1 = \frac{5+9}{2} = 7$ می باشد. بنابراین مرکز دسته دوازدهم

$$x_{12} = x_1 + 11C = 7 + 44 = 51 \text{ است.}$$

۶

مجموع تمام درصد فراوانی نسبی ها برابر ۱۰۰ است. بنابراین:

$$17 + 20,5 + 22 + x + 18 = 100 \Rightarrow x = 100 - 77,5 = 22,5$$

بنابراین ۲۲٫۵ درصد داده ها در دسته چهارم قرار می گیرد. پس فراوانی نسبی دسته چهارم برابر ۲۲٫۵٪ و در نتیجه اندازه زاویه مرکزی متناظر با دسته چهارم در نمودار دایره ای برابر

$$= 81^\circ = 360 \times 22,5\%$$

۷ صد داده ای با بیش ترین فراوانی است با توجه به این که هر یک از داده ها یکبار تکرار شده اند پس x باید یکی از همین داده ها باشد تا فراوانی آن ۲ شود و در نتیجه x مد داده ها باشد از

طرفی میانگین با مد برابر است پس:

$$\bar{x} = \frac{1043 + 1039 + x + 1040 + 1044 + 1051 + 1045 + 1053}{8} = x$$

$$\Rightarrow 7315 + x = 8x \Rightarrow x = 1045$$

با مرتب کردن داده‌ها میانه را بدست می‌آوریم اگر میانه نیز 1045 باشد آنگاه x برابر 1045 است و در غیر این صورت نشدنی است.

$$1039, 1040, 1043, 1044, 1045, 1045, 1051, 1053$$

تعداد داده‌ها 8 و میانگین دو داده وسط یعنی میانگین 1044 و 1045 میانه خواهد بود، پس نشدنی است.

پس به ازای هیچ مقدار x این اتفاق می‌افتد.

$$\frac{1044 + 1045}{2} = 1044,5 \rightarrow$$

چون هر دو متولد یک ماه هستند پس کل حالات برابر است با:

$$n(S) = 30 \times 30$$

می‌خواهیم روز تولد اینها متفاوت باشد. پس اگر یکی متولد روزی از ماه باشد دیگری نباید در آن روز متولد شده باشد.

$$n(A) = 30 \times 29$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30 \times 29}{30 \times 30} = \frac{29}{30}$$

برای هر کدام از افراد 6 روز برای مراجعه وجود دارد. پس:

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

می‌توان گفت حالاتی که حداقل دو نفر در یک روز مراجعه کنند برابر است با:

$$n(A) = 6 \times 6 \times 6 \times 6 - 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \text{کل حالات} - \text{حالاتی که هیچ دو نفری در یک روز مراجعه نکنند}$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 - 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = 1 - \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

10

(الف)

$$n(S) = \binom{12}{4}, n(A) = \binom{7}{3} \times \binom{5}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{3} \times \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}}$$

(ب) چهار مهره هم‌رنگ یا سفید هستند یا سیاه.

$$n(A) = \binom{7}{4} \oplus \binom{5}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{4} + \binom{5}{4}}{\binom{12}{4}}$$

تعداد کل اعداد 3 رقمی ممکن برابر است با:

$$n(S) = \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = 60$$

حالا ما کارت با دو رقم فرد و یک رقم زوج می‌خواهیم.

$$n(A) = \binom{2}{2} \times \binom{3}{1} \times 3! = 18$$

به‌خاطر اینکه 3 عدد 3! جای‌گشت دارند در 3! ضرب شده است.

$$P(A) = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$

اگر یک سکه را n بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه حداقل 1 خط ظاهر شود را می‌توانیم با استفاده از اصل متمم به شکل زیر به دست آوریم.

$$P(\downarrow A) = 1 - P(\downarrow A')$$

حداقل یک بار خط بیاید اصلاً خط نیاید

$$P(A') = \frac{1}{2^n} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$P(A) = 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{97}{100} \rightarrow \frac{3}{100} > \frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{100}{3} < 2^n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{33,3}$

پس حداقل $n = 6$ است.

۱۳) چون پیشامد فرزندان از هم مستقل اند، کاری به فرزند اول نداریم و احتمال پسر بودن دو تای دیگر $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ است.

۱۴)

$$P(\text{دومی قرمز و اولی آبی | سومی سبز}) = P(\text{اولی آبی | دومی قرمز}) \times P(\text{اولی آبی}) \times P(\text{سومی سبز})$$

$$= \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} \times \frac{\binom{3}{1}}{\binom{9}{1}} \times \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{20} = 0,05$$

۱۵)

پیشامد مضرب ۳ آمدن در پرتاب ۱ تاس $A =$

چون اعداد تاسها مستقل از یکدیگرند می توانیم احتمال هر تاس را حساب کنیم و در هم ضرب کنیم.

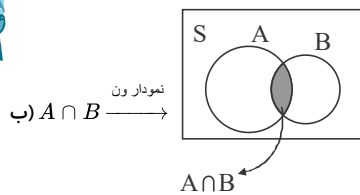
هر تاس می تواند از یک تا ۶ باشد و ما می خواهیم ۳ یا ۶ نباشد. پس:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

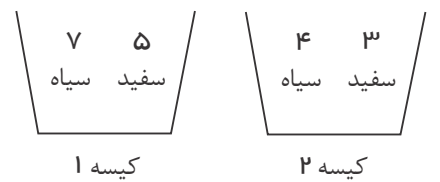
۱۶)

الف) $(A \cap B) - C$



$A =$ پیشامد سفید بودن

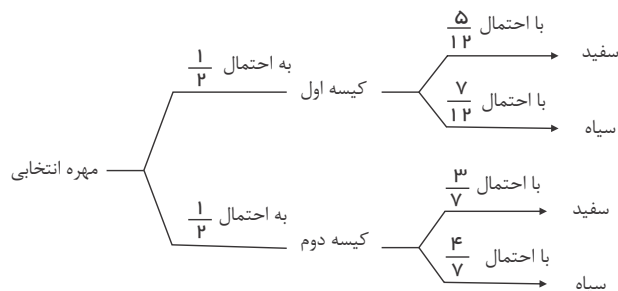
$$B = \text{مهره انتخابی} \rightarrow P(B) = \frac{1}{8}$$



۱۷)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

رابطه ۱



$$\begin{cases} P(A) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{35 + 36}{24 \times 2} = \frac{71}{48} \\ P(A \cap B) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{24} \end{cases}$$



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}}{\frac{\cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{7}}} = \frac{35}{71}$$

18

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$$

$$3 \leq x + 2 < 7 \rightarrow 1 \leq x < 5 \rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 9\}$$

$$|x| < 3 \rightarrow -3 < x < 3 \rightarrow C = \{1, 2\}$$

عبارت ۱:

$$A - B = \{1, 3\} \quad B' = \{1, 5, 3, 7, 8, 10, \dots, 15\}$$

$$A \cap B' = \{1, 3\}$$

عبارت ۲:

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap (\{2, 4, 6, 9\} \cup \{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 6, 9\} = \{1, 2, 4\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ بنابراین}$$

عبارت ۳:

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup (\{2, 4, 6, 9\} \cup \{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4, 6, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

$$(A \cup B) \cup C = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 9\}) \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ پس}$$

19

$$x + 70^\circ + 10^\circ + 80^\circ + 65^\circ = 360^\circ \rightarrow x = 135^\circ$$

$$x = \frac{f}{n} \times 360^\circ$$

$$\frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{f}{n} \rightarrow \frac{f}{n} = \frac{3}{8} = \text{فراوانی نسبی}$$

$$\frac{3}{8} \times 100 = \frac{300}{8} = 37,5\%$$

دسته‌ای با زاویه 135° ، $37,5\%$ کل جامعه را به خود اختصاص داده است.

20

$$1) (A \cap B') \cup (A' \cap B') \Rightarrow B' \cap \overbrace{(A \cup A')}^M = B'$$

$$2) \underbrace{(A \cup A')}_{U} \cap (A \cup B) = A \cup B$$

$$3) (A - B) \cup (A \cap C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C) \rightarrow A \cap (B \cap C)'$$

$$\Rightarrow A - (B \cap C') = A - (B - C) \quad \checkmark$$