



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: آمار و احتمال ۱۱ ریاضی فصل ۱ (تستی)

تاریخ آزمون:

۱ اگر  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  و  $B = \{c, d, e, f, g\}$  آن گاه چند مجموعه سه عضوی مانند  $X$  می توان یافت به طوری که  $X \subseteq A$  و  $X \not\subseteq B$ ؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۱۴ (۱)

۲ حاصل عبارت  $(A' \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C' \cap D')$  کدام است؟

$A' \cap B' \cap C' \cap D'$  (۴)

$U$  (۳)

$D'$  (۲)

$A' \cap B' \cap C'$  (۱)

۳ کدام یک افزاری برای مجموعه  $A = \{1, 3, \{3\}\}$  می باشد؟

$\{\{1, 3\}, \{\{3\}\}\}$  (۴)

$\{\{1, \{3\}\}, \{3, \{3\}\}\}$  (۳)

$\{\{1\}, \{\{3\}\}\}$  (۲)

$\{\{1, 3\}, \{3\}\}$  (۱)

۴ گزاره  $p \Leftrightarrow q$  معادل کدام یک از گزاره های زیر نیست؟

$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$  (۴)

$(q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$  (۳)

$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$  (۲)

$\sim p \Leftrightarrow \sim q$  (۱)

۵ اگر  $A = \{n : 8n + 3 < 100, n \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{k : k = 15n + 1, k > 100, n \in \mathbb{N}\}$  باشد، مجموعه  $B$  چند عضو دارد؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۶ اگر  $A, B, C$  سه مجموعه دلخواه باشند، آن گاه چه تعداد از روابط زیر همواره صحیح است؟

$A - B = \emptyset \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$  (الف)

$A \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B$  (ب)

$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$  (پ)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

۷ گزاره  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$  با کدام یک از گزاره های زیر هم ارز است؟

$F$  (۴)

$T$  (۳)

$q$  (۲)

$p$  (۱)

۸ اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه ی جهانی باشد، آن گاه چند مجموعه مانند  $A$  وجود دارد به گونه ای که  $A \cup \{1\} = A \cap \{1, 2\}$  باشد؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

هیچ (۱)

۹ اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  باشد، چند مجموعه مانند  $X$  در رابطه  $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$  صدق می کنند؟

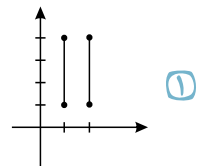
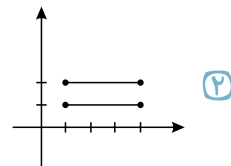
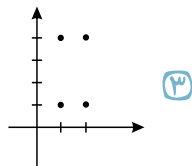
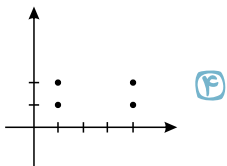
۱۶ (۴)

۲ (۳)

۳۲ (۲)

۴ (۱)

۱۰ اگر  $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$  و  $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x - 1 < 5\}$  باشد، نمودار ضرب دکارتی  $A \times B$  کدام است؟



۱۱ اگر  $A = \{5, 1, x + z\}$  و  $B = \{x + 2y, 3, y + z\}$  و  $A \times B = B \times A$  باشد، آنگاه مقدار  $y$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۱ (۱)



۱۲ گزاره  $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$  هم‌ارز منطقی با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟  $(T)$  گزاره همیشه درست و  $(F)$  گزاره همیشه نادرست است.

- ①  $T$       ②  $F$       ③  $p$       ④  $q$

۱۳ گزاره‌های الف)  $\forall x \in \mathbb{R}; 6x^2 - 8x + 9 \neq 0$  و ب)  $\exists x \in \mathbb{R}; 5x^2 - x + 1 = 0$  مفروض‌اند. ارزش این دو گزاره به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

- ① درست - درست      ② نادرست - درست      ③ درست - نادرست      ④ نادرست - نادرست

۱۴ چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) هر شش ضلعی محدب ۹ قطر دارد و مجموع زوایای داخلی آن  $540^\circ$  است.

ب) هر شش ضلعی محدب ۹ قطر دارد یا مجموع زوایای داخلی آن  $540^\circ$  است.

پ) اگر مجموع زوایای داخلی شش ضلعی محدب  $540^\circ$  باشد، آن گاه ۹ قطر دارد.

- ① صفر      ② یک      ③ دو      ④ سه

۱۵ در صورتی که مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب شامل ۴ و ۵ عضو باشند و تعداد اعضای  $(A \times B) \cup (B \times A)$  برابر ۳۱ باشد، آن گاه حاصل  $n(A \cup B)$  کدام است؟

- ① ۹      ② ۶      ③ ۷      ④ ۵

۱۶ اگر  $A_n = [-n + 1, n^2 + n)$  آن گاه مجموعه  $A_4 - [A_4 \cup (A_3 \cap A_4)]$  چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

- ① ۱۴      ② ۱۵      ③ ۱۶      ④ ۱۷

۱۷ اگر  $A = \{x, \{x\}\}$  و  $B = \{\{x, \{x\}\}\}$  باشند، آن گاه کدام رابطه درست است؟

- ①  $A \cap B = \{x\}$       ②  $A \cap B = B$       ③  $A \cap B = A$       ④  $A \cap B = \emptyset$

۱۸ مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  چند زیرمجموعه دارد که هریک از آن زیرمجموعه‌ها  $a$  داشته ولی نه  $b$  داشته باشند و نه  $c$  را؟

- ① ۸      ② ۱۲      ③ ۱۶      ④ ۲۴

$p$	$q$	؟
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۱۹ جدول ارزش گزاره‌های روبه‌رو مربوط به کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

①  $\sim p \wedge q$

②  $\sim q \wedge p$

③  $\sim p \vee \sim q$

④  $\sim p \wedge \sim q$

۲۰ جدول ارزش گزاره  $p \vee \sim (p \wedge q)$  به کدام صورت می‌باشد؟

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
$T$	$T$	$T$	$F$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$F$	$T$	$T$

②

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
$T$	$T$	$T$	$F$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$T$	$T$

①

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
$T$	$T$	$T$	$F$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$T$	$F$

④

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
$T$	$T$	$T$	$F$	$F$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$F$	$T$	$T$

③

# پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$? = |(X \subseteq A) \wedge (X \not\subseteq B)| = |X \subseteq A| - |X \subseteq A \wedge X \subseteq B| = \binom{6}{3} - \binom{4}{3} = 16$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

می دانیم  $A \cup (A \cap B) = A$  و  $A \cap (A \cup B) = A$  (قوانین جذب)

$$A' \cap B' \cap C' = X \Rightarrow X \cup (X \cap D') = X = A' \cap B' \cap C'$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

دقت کنید افزای صحیح است که اولاً اجتماع همهٔ عضوهای آن برابر مجموعهٔ اصلی (در این جا  $A$ ) شود و ثانیاً اشتراک دو به دوی آنها  $\emptyset$  باشد و ثالثاً هیچکدام تهی نباشند. با این توضیحات بدیهی است که گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

گزاره  $q \Leftrightarrow p$  در صورتی درست است که ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$  یکسان باشد. اما در صورتی که  $p$  و  $q$  هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، گزاره‌های  $(p \wedge \sim q)$  و  $(\sim p \wedge q)$  هر دو نادرست هستند و در نتیجه گزاره  $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$  نادرست است. پس این گزاره نمی‌تواند معادل گزاره  $q \Leftrightarrow p$  باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

اول از همه عضوهای مجموعه  $A$  را پیدا می‌کنیم. صورت سؤال گفته است که  $A = \{n : \lambda n + 3 < 100, n \in \mathbb{N}\}$  است. پس اعضای  $A$ ،  $n$ هایی طبیعی هستند که  $\lambda n + 3 < 100$  باشد. داریم:

$$\lambda n + 3 < 100 \xrightarrow{-3} \lambda n < 97 \xrightarrow{\div \lambda} n < 12,1 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, \dots, 12 \Rightarrow A = \{1, 2, \dots, 12\} \quad I$$

حالا می‌خواهیم ببینیم که  $B$  چند عضو دارد. طبق صورت سؤال  $B = \{k : k = 15n + 1, k > 100, n \in A\}$  است. پس عضوهای  $B$  به صورت  $k$ هایی هستند که  $k = 15n + 1$  است و  $k > 100$  و  $n$  عضو  $A$  است. با استفاده از رابطه  $k = 15n + 1$  و  $k > 100$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} k = 15n + 1 \\ k > 100 \end{array} \right\} \Rightarrow 15n + 1 > 100 \Rightarrow 15n > 99 \xrightarrow{\div 15} n > 6,6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 7, 8, 9, \dots, 12 \quad I$$

چند تا  $n$  به دست آمد؟  $6 = 12 - 7 + 1$  تا  $n$ . به ازای هر  $n$  مطابق رابطه  $k = 15n + 1$ ، یک عضو برای مجموعهٔ  $B$  به دست می‌آید. پس مجموعهٔ  $B$ ، ۶ عضو دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

گزارهٔ «الف» همواره درست است. زیرا داریم:

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$$

گزارهٔ «ب» لزوماً درست نیست، به عنوان مثال نقض، اگر  $A = \emptyset$  و  $B = \{1\}$  باشد، آنگاه  $A \times B = B \times A$  است ولی  $A \neq B$  می‌باشد.

گزارهٔ «پ» همواره درست است، زیرا داریم:

$$(x, y) \in [(A \times B) \cap (B \times A)]$$

$$\Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B)] \wedge [(x, y) \in (B \times A)] \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (y \in B)] \wedge [(x \in B) \wedge (y \in A)]$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B)^2 \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(y \in A) \wedge (y \in B)] \Leftrightarrow [x \in (A \cap B)] \wedge [y \in (A \cap B)]$$

روش اول: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)]$	$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
د	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، ارزش گزاره مورد نظر (ستون آخر) با ارزش گزارهٔ  $q$  یکسان است.

روش دوم: با استفاده از قوانین گزاره‌ها داریم:

می‌دانیم:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv \sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \Rightarrow q$$

$$\equiv \sim \left[ \underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \vee (p \wedge q) \right] \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee q \equiv q$$

باتوجه به تساوی  $A \cup \{1\} = A \cap \{1, 2\}$ ، رابطه  $A \cup \{1\} \subseteq A \cap \{1, 2\} \subseteq A \Rightarrow \{1\} \subseteq A$  برقرار است و داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\{1\} \subseteq A \cup \{1\} \subseteq A \cap \{1, 2\} \subseteq A \Rightarrow \{1\} \subseteq A$$

$$A \subseteq A \cup \{1\} \subseteq A \cap \{1, 2\} \subseteq \{1, 2\} \Rightarrow A \subseteq \{1, 2\}$$



بنابراین تنها مجموعه‌های ممکن برای  $A$  عبارتند از  $\{1\}$  و  $\{1, 2\}$ .

دقت کنید که  $X$  باید همه اعضای مجموعه  $A \cap B$  را داشته باشد ولی اعضای  $A \cup B$  که در  $A \cap B$  نیستند را می‌تواند داشته باشد یا نداشته باشد.  

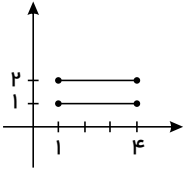
$$\left. \begin{aligned} A \cap B &= \{2, 3, 4\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 5\} \Rightarrow 2^2 = 4 \quad X \text{ برای } X$$

ابتدا مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را می‌یابیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-4) \leq 0\} \xrightarrow{1 \leq x \leq 4} A = [1, 4]$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x - 1 < 5\} \Rightarrow B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} B = \{1, 2\}$$

بنابراین نمودار  $A \times B$  به صورت زیر خواهد بود:



نکته: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیرتهی باشند و  $A \times B = B \times A$ ، آنگاه  $A = B$  می‌باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)

$$A \times B = B \times A \xrightarrow{A, B \neq \emptyset} A = B \Rightarrow \{5, 1, x + z\} = \{x + 2y, 3, y + z\}$$

بدیهی است باید  $x + z = 3$  باشد از طرفی:

$$(x + 2y) + (y + z) = 5 + 1 \Rightarrow x + 3y + z = 6 \xrightarrow{x+z=3} 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲)

نکته:

۱)  $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$  قانون ادخال فاصل  
 ۲)  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$$(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q \vee r) \equiv (\sim(\sim p) \vee q) \Rightarrow (p \vee q \vee r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow [(p \vee q) \vee r] \equiv T \quad \text{قانون ادخال فاصل}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

نکته: گزاره نمای شامل متغیر  $x$  که با سور عمومی همراه می‌شود وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه‌ی متغیر در گزاره نما صدق کند. به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

نکته: گزاره نمای شامل متغیر  $x$  که با سور وجودی همراه می‌شود وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

در قسمت «الف»، معادله‌ی  $6x^2 - 8x + 9 = 0$ ، هیچ گاه ریشه ندارد (چون  $\Delta < 0$  است). بنابراین گزاره درست است. در قسمت «ب»، معادله‌ی  $5x^2 - x + 1 = 0$  نیز فاقد ریشه است (چون  $\Delta < 0$  است) در واقع مجموعه تهی است. بنابراین گزاره‌ی «ب» نادرست است.

تذکر: گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش درست یا نادرست دارد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

تذکر: در رابطه‌ی عطفی اگر یکی از گزاره‌ها ارزش نادرستی داشته باشند. گزاره‌ی عطفی نادرست است یعنی  $p \wedge F \equiv F$

تذکر: در رابطه‌ی فصلی اگر یکی از گزاره‌ها ارزش درستی داشته باشند گزاره‌ی فصلی ارزشی درست دارد  $p \vee T \equiv T$

تذکر: در گزاره‌ی شرطی  $p \Rightarrow q$  اگر  $p$  نادرست باشد آنگاه گزاره‌ی شرطی به اتفاق مقدم درست است.

تعداد قطرهای هر  $n$  ضلعی محدب برابر با  $\frac{n(n-3)}{2}$  و مجموع زوایای داخلی آن  $180^\circ(n-2)$  درجه است. بنابراین برای شش ضلعی محدب داریم:

$$\text{تعداد قطرهای شش ضلعی محدب} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی شش ضلعی محدب} = 180^\circ(6-2) = 720^\circ$$

گزاره‌ی «الف»، ترکیب عطفی دو گزاره است که یکی از گزاره‌های آن نادرست می‌باشد، پس ارزش آن «نادرست» است.

گزاره‌ی «ب»، ترکیب فصلی دو گزاره است که یکی از گزاره‌های آن درست می‌باشد، پس ارزش آن «درست» است.

گزاره‌ی «پ»، یک گزاره‌ی شرطی است که به اتفاق مقدم «درست» می‌باشد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$|(A \times B) \cup (B \times A)| = |A \times B| + |B \times A| - |(A \times B) \cap (B \times A)| \Rightarrow 31 = 4 \times 5 + 5 \times 4 - |A \cap B|^2 \Rightarrow |A \cap B| = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 5 - 3 = 6$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

$$A_p = [-1, 6], A_r = [-2, 12], A_f = [-3, 20]$$



$$[A_f \cup (A_p \cap A_f)] - A_p = A_f - A_p = [-3, 1) \cup [6, 20)$$

بازه اول دو عضو و بازه دوم چهارده عضو و بر روی هم شانزده عضو صحیح دارند.

مجموعه  $A$  دو عضو به صورت  $x$  و  $\{x\}$  دارد که هیچ یک از آن‌ها در  $B$  نیستند.  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱۷

هر یک از اعضا  $a, b$  و  $c$  دقیقاً یک حالت برای زیرمجموعه دارند:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱۸

$a$ : بودن  $e$ : بودن یا نبودن  $f$ : بودن یا نبودن

بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر  $2^3 \times 1^2 \times 1$  یعنی ۸ درست است.

همان‌طور که در جدول ارزش گزاره‌ها مشاهده می‌شود، گزاره تنها هنگامی درست است که هر دو گزاره  $p$  و  $q$  غلط باشند، بنابراین گزاره مورد نظر به صورت  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱۹

$\sim p \wedge \sim q$  است.

۱  ۲  ۳  ۴  ۲۰

نکته: رابطه عطفی  $p \wedge q$  زمانی درست است که هر دو گزاره  $p$  و  $q$  ارزش درستی داشته باشند. رابطه فصلی  $p \vee q$  زمانی نادرست است که هر دو گزاره  $p$  و  $q$  ارزش نادرستی داشته باشند.

باتوجه به نکات فوق جدول ارزش گزاره در گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

# پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴