



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

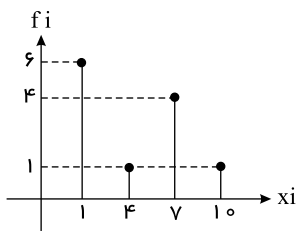


نام آزمون: امارو احتمال ۱۱ ریاضی فصل ۳ (تستی)

تاریخ آزمون:

۱) اگر انحراف معیار داده‌های  $\frac{1}{3}x_1 + 5, \frac{1}{3}x_2 + 5, \dots, \frac{1}{3}x_n + 5$  برابر  $2,5$  باشد، انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کدام است؟

①  $2,5$       ②  $7,5$       ③  $0,8$       ④  $5,8$



۲) واریانس داده‌های آماری با نمودار میله‌ای مقابل کدام است؟

①  $9,5$       ②  $10$       ③  $10,5$       ④  $12$

۳) اگر از هر یک از داده‌های آماری متمایز، ۷ واحد کم کنیم، ضریب تغییرات آن‌ها دو برابر می‌شود. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

①  $7$       ②  $9$       ③  $13$       ④  $14$

۴) چه تعداد از موارد زیر مربوط به علم آمار است؟

الف) چه تعداد از دانش آموزان پایه یازدهم مدرسه شما به ورزش دوچرخه سواری علاقه دارند؟  
ب) درآمد کارمندان شرکت نفت چقدر است؟

پ) ۷۰ نفر از ۱۵۰ نفر دانش آموز پایه یازدهم به ورزش والیبال علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از آن‌ها را انتخاب کنیم، چقدر ممکن است که لااقل ۱۲ نفر آن‌ها به والیبال علاقه مند باشند؟

ت) از دانش آموزان پایه یازدهم یک مدرسه، ۲۵ نفر را انتخاب کرده‌ایم و مشاهده کردیم ۴ نفر آن‌ها چپ دست هستند. در این صورت از ۱۰۰ نفر دانش آموز پایه یازدهم این مدرسه، ممکن است چند نفر چپ دست باشند؟

① یک      ② دو      ③ سه      ④ چهار

۵) میانگین شعاع تعدادی دایره برابر ۵ است. اگر ضریب تغییرات شعاع این دایره‌ها برابر  $1,2$  باشد، میانگین مساحت آنها کدام است؟

①  $11$       ②  $6\pi$       ③  $11\pi$       ④  $61$

۶) نمرات ریاضی ۴۰ دانش آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

$x$	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
$f$	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

①  $14,2$       ②  $14,25$       ③  $14,4$       ④  $14,75$



۷) تعدادی داده آماری را طبق جدول زیر دسته‌بندی کرده‌ایم. اگر فراوانی نسبی دسته اول  $0.04$  باشد، آنگاه درصد فراوانی نسبی متناظر با داده  $x_i = 12.5$  چقدر است؟

دسته‌ها	$f_i$
$[0, 5)$	$8 - a$
$[5, 10)$	$a$
$[10, 15)$	$a + 2$
$[15, 20]$	$8$

- ۱۲ ①      ۱۶ ②      ۲۴ ③      ۳۶ ④

۸) مقادیر ۱۱ داده آماری به صورت زیر داده شده است. میانگین داده‌های بین چارک اول و سوم کدام است؟

۱۶, ۱۳, ۱۲, ۱۵, ۱۴, ۱۶, ۱۵, ۱۰, ۵, ۱۸, ۲۰

- ۱۴,۸ ①      ۱۵,۴ ②      ۱۴,۶ ③      ۱۵ ④

۹) اگر به داده‌های جدول زیر  $k$  داده اضافه کنیم، در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید زاویه متناظر به  $d$  به  $20^\circ$  تغییر کرده است.  $k$  کدام می‌تواند باشد؟

داده	$a$	$b$	$c$	$d$
فراوانی	۴	۶	۸	۶

- ۱۲ ①      ۱۸ ②      ۲۴ ③      ۳۰ ④

۱۰) در جدول زیر اختلاف مد و میانگین کدام است؟

داده‌ها	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
فراوانی	۲	۲	۴	۳	۱

- ۰,۲۵ ①      ۳,۲۵ ②      صفر ③       $\frac{1}{12}$  ④

۱۱) اگر میانه داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر با  $k$  باشد، میانه داده‌های  $3 - 2x_1, 3 - 2x_2, \dots, 3 - 2x_n$  بر حسب  $k$  چند است؟

- $k$  ①       $-2k + 3$  ②       $-2k$  ③       $k + 3$  ④

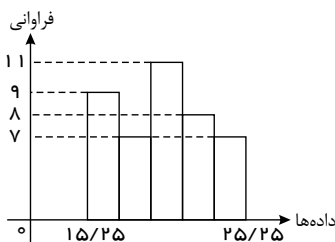
۱۲) در  $50$  داده آماری مجموع تمام داده‌ها برابر  $100$  و مجموع مجزورات این داده‌ها برابر  $272$  می‌باشد ضریب تغییرات کدام است؟

- ۰,۳ ①      ۰,۴ ②      ۰,۵ ③      ۰,۶ ④

۱۳) مجموع  $8$  داده آماری برابر  $48$  و ضریب تغییرات آنها  $0.5$  می‌باشد، مجموع مربعات این داده‌ها کدام است؟

- ۲۴۰ ①      ۳۲۰ ②      ۳۶۰ ③      ۴۵۰ ④

۱۴) در نمودار بافت‌نگاشت (مستطیلی) زیر، به داده‌های آماری موردنظر سه داده  $17, 21$  و  $22$  افزوده می‌شود. درصد فراوانی نسبی دسته چهارم کدام خواهد شد؟ (طول دسته‌ها با هم برابر است.)



- ۲۵ ①      ۱۵ ②      ۳۰ ③      ۲۰ ④

۱۵) اگر شکل زیر نمودار جعبه‌ای داده‌های  $25, 20, 21, 26, 12, 14, 15, 24, 20, 16, 14, 18$  باشد، حاصل  $\frac{b+d}{2} - c$  کدام است؟

- صفر ①       $0.5$  ②       $-0.5$  ③       $-1$  ④



۱۶ کدام شاخص‌های آماری برای داده‌های ۸، ۹، ۵، ۷ و ۱ با هم برابرند؟

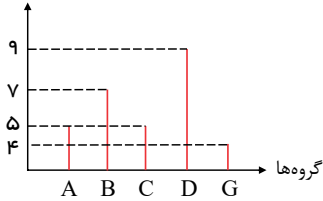
- ۱ میانگین و واریانس      ۲ دامنه تغییرات و میانگین      ۳ میانگین و انحراف معیار      ۴ واریانس و دامنه تغییرات

۱۷ در جدول توزیع فراوانی زیر، حاصل  $(3a + 3b + 3c)$  کدام است؟

حدود دسته‌ها	۳ - ۵	۵ - ۷	۷ - ۹	۹ - ۱۱	۱۱ - ۱۳
فراوانی نسبی	۰٫۳۵	$a$	$b$	۰٫۱۵	$c$

- ۱ ۱٫۲۵      ۲ ۰٫۵      ۳ ۰٫۷۵      ۴ ۱٫۵

فراوانی مطلق



۱۸ در نمودار میله‌ای زیر تقریباً چند درصد داده‌ها در گروه C قرار دارند؟

- ۱ ۱۶٫۶      ۲ ۱۵٫۶      ۳ ۱۷٫۷      ۴ ۱۶٫۳

۱۹ در جدول داده‌های مقابل، میانگین میانه و مد کدام است؟

$x_i$	۳	۸	۱۲	۱۴	۱۷	۲۰
$f_i$	۵	۱	۵	۲	۷	۳

- ۱ ۱۷      ۲ ۱۴٫۵      ۳ ۱۳      ۴ ۱۵٫۵

۲۰ میانگین و میانه ۱۱ داده آماری به ترتیب ۱۳ و ۱۲ محاسبه شده است. متأسفانه بعداً معلوم می‌شود که داده‌هایی که مقدار آن‌ها ۱۵ محاسبه شده بود مقدار ۱۷ داشته‌اند. اگر این خطا را اصلاح کنیم آن‌گاه:

- ۱ میانگین تغییر نمی‌کند اما میانه افزایش می‌یابد.      ۲ میانگین و میانه تغییر نمی‌کنند.      ۳ میانگین افزایش می‌یابد اما میانه تغییر نمی‌کند.      ۴ میانگین و میانه هر دو افزایش می‌یابند.



# پاسخنامه تشریحی

از داده‌ها، ۵ واحد کم می‌کنیم که تاثیری روی انحراف معیار ندارد:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۵

$$\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{3}x_2, \dots, \frac{1}{3}x_n$$

تمام داده‌ها را در ۳ ضرب می‌کنیم که انحراف معیار هم در ۳ ضرب می‌شود:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \sigma_{جدید} = 2,5 \times 3 = 7,5$$

با توجه به نمودار می‌توانیم جدول روبه‌رو را در نظر بگیریم:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۵

مرکز دسته	۱	۴	۷	۱۰
فراوانی	۶	۱	۴	۱

$$\bar{x} = \frac{6 \times 1 + 1 \times 4 + 4 \times 7 + 1 \times 10}{6 + 1 + 4 + 1} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{6(1-4)^2 + 1(4-4)^2 + 4(7-4)^2 + 1(10-4)^2}{12} = \frac{54 + 36 + 36}{12} = \frac{126}{12} = 10,5$$

اگر از هر یک از داده‌های آماری ۷ واحد کم کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی از میانگین ۷ واحد کم می‌شود.  ۱  ۲  ۳  ۴  ۵

$$\left. \begin{aligned} CV_{قدیم} &= \frac{\sigma}{\bar{x}} \\ CV_{جدید} &= \frac{\sigma}{\bar{x}-7} \end{aligned} \right\} \rightarrow CV_{جدید} = 2CV_{قدیم} \rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}-7} = 2 \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{1}{\bar{x}-7} = \frac{2}{\bar{x}} \rightarrow 2\bar{x} - 14 = \bar{x} \rightarrow \bar{x} = 14$$

موارد «الف»، «ب» و «ت» مربوط به علم آمار هستند. دقت کنید که در مورد «پ»، اطلاعات در مورد جامعه داریم و سؤال در مورد نمونه مطرح شده که مربوط به علم احتمال است ولی در مورد «ت»، اطلاعات نمونه داده شده و در مورد جامعه نامعلوم سؤال شده است.  ۱  ۲  ۳  ۴  ۵

میانگین محیط دایره‌ها از تقسیم مجموع مساحت دایره‌ها بر تعدادشان به‌دست می‌آید. (نشان‌دهنده شعاع دایره است.)  ۱  ۲  ۳  ۴  ۵

$$\bar{x} = \frac{\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \dots + \pi r_N^2}{N} \rightarrow \bar{x} = \frac{\pi(\sum_{i=1}^N R_i^2)}{N}$$

میانگین شعاع دایره‌ها برابر ۵ است. میانگین محیط دایره‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \dots + 2\pi r_N}{N} \rightarrow \bar{x} = \frac{2\pi(r_1 + r_2 + \dots + r_N)}{N} \rightarrow \bar{x} = 2\pi \times 5 = 10\pi$$

$$CV = 1,2 \rightarrow 1,2 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma^2 = 36 \rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N R_i^2}{N} - (\bar{r})^2 \rightarrow 36 = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i^2)}{N} - 25 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N R_i^2}{N} = 61$$

$$\frac{\pi(\sum_{i=1}^N R_i^2)}{N} = 61\pi \text{ برابر } \bar{x} \text{ است.}$$

ابتدا از همه داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم واضح است از میانگین نیز ۱۴ واحد کم خواهد شد:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۵

$x - 14$	-4	-2	0	1	3	4
$f$	5	8	7	10	6	4

$$\bar{x} - 14 = \frac{\sum_{i=1}^6 f_i x_i}{\sum_{i=1}^6 f_i} = \frac{5(-4) + 8(-2) + 7(0) + 10(1) + 6(3) + 4(4)}{5 + 8 + 7 + 10 + 6 + 4}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - 14 = \frac{-20 - 16 + 0 + 10 + 18 + 16}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\Rightarrow \bar{x} - 14 = 0,2 \Rightarrow \bar{x} = 14,2$$

۱  ۲  ۳  ۴  ۵

تعداد کل داده‌ها  $n = 8 - a + a + a + 2 + 8 = 18 + a$

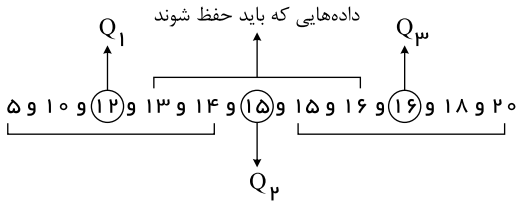
$$\frac{f_i}{n} = 0,04 \Rightarrow \frac{8-a}{18+a} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \Rightarrow 200 - 25a = 18 + a \Rightarrow 26a = 182 \Rightarrow a = \frac{182}{26} = 7$$



$$\Rightarrow n = 18 + 7 = 25, f_p = 9$$

$$\frac{f_p}{n} \times 100 = \frac{9}{25} \times 100 = 36$$

با مرتب کردن داده‌ها به صورت صعودی داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۸)



$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{13 + 14 + 15 + 15 + 16}{5} = \frac{73}{5} = 14,6$$

قبل از اضافه کردن  $k$  داده، زاویه مرکزی مربوط به داده  $d$  برابر  $36^\circ \times \frac{6}{24}$ ، یعنی  $9^\circ$  است و قرار است به  $20^\circ$  افزایش پیدا کند. فرض می‌کنیم از  $k$  داده اضافه شده،  $x$  داده به  $d$  اضافه شود، آنگاه: (۱) (۲) (۳) (۴) (۹)

$$\frac{6 + x}{24 + k} = \frac{200}{360} \Rightarrow 120 + 5k = 54 + 9x \Rightarrow 9x = 5k + 66$$

حال گزینه‌ها را انتخاب می‌کنیم:

اگر  $k = 12$  آنگاه  $x = 14$  که تناقض است، چون  $k \leq x$ .

اگر  $k = 18$  آنگاه  $x = \frac{52}{3}$  که تناقض است.

اگر  $k = 24$  آنگاه  $x = \frac{62}{3}$  که تناقض است.

اگر  $k = 30$  آنگاه  $x = 24$  که قابل قبول است.

در جدول داده‌شده مد برابر است با داده با بیشترین فراوانی یعنی  $\hat{x} = 18$  برای محاسبه میانگین به روش سریع می‌توانیم همه داده‌ها را منهای ۱۸ کنیم سپس (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰)

تقسیم بر ۳ کنیم یعنی:

$$y_i = \frac{x_i - 18}{3}$$

$$\frac{y_i}{f_i} \begin{array}{c|cccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{array} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2 \times (-2) + 2 \times (-1) + 4 \times (0) + 3 \times (1) + 1 \times (2)}{2 + 2 + 4 + 3 + 1}$$

$$= -\frac{1}{12} \Rightarrow \bar{x} = 3\bar{y} + 18 = 3 \times \left(-\frac{1}{12}\right) + 18 = 18 - \frac{1}{4} = 17,75$$

پس اختلاف مد و میانگین برابر است با:

$$\hat{x} - \bar{x} = 18 - 17,75 = 0,25$$

اگر میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_p$  برابر با  $k$  باشد، میانگین داده‌های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_p + b$  برابر با  $ak + b$  است. پس میانگین این داده‌های (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)

جدید سؤال برابر با  $3 - 2k$  می‌باشد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲)

میانگین این داده‌ها برابر  $2 = \frac{100}{50}$  است.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{272}{50} - (2)^2 = \frac{136}{25} - 4 = \frac{36}{25} \rightarrow \sigma = \frac{6}{5}$$

$$c_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

با توجه به اینکه مجموع ۸ داده آماری ۴۸ است، بنابراین میانگین آنها برابر است با  $\bar{x} = \frac{48}{8} = 6$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \bar{x} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \rightarrow \sigma^2 = 3^2 = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\bar{x})^2 \rightarrow 9 = \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2) - 36$$

$$\rightarrow 45 = \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2) \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2 = 360$$

فاصله  $15,25$  تا  $25,25$ ، ۵ برابر طول دسته‌هاست. پس طول هر دسته برابر است با: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)



$$\text{طول دسته} = \frac{25,25 - 15,25}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

دسته‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\text{دسته اول} = [15,25, 17,25)$$

$$\text{دسته دوم} = [17,25, 19,25)$$

$$\text{دسته سوم} = [19,25, 21,25)$$

$$\text{دسته چهارم} = [21,25, 23,25)$$

$$\text{دسته پنجم} = [23,25, 25,25)$$

عدد ۱۷ به دسته اول، عدد ۲۱ به دسته سوم و عدد ۲۲ به دسته چهارم اضافه می‌شوند، در نتیجه داریم:

$$\text{فراوانی نسبی دسته چهارم} = \frac{9}{10 + 7 + 12 + 9 + 7} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\text{درصد فراوانی دسته چهارم} = 0,2 \times 100 = 20$$

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

$$12, 14, \underbrace{14, 15, 16}_{Q_1}, \underbrace{18, 20, 20}_{Q_2}, \underbrace{21, 24, 25, 26}_{Q_3}$$

تعداد داده‌ها زوج است، پس میانه آن‌ها برابر میانگین دو داده وسط است:

$$Q_2 = \frac{18 + 20}{2} = 19 \Rightarrow \text{میانه } c = 19$$

چارک اول برابر میانه ۶ داده اول و چارک سوم برابر میانه ۶ داده آخر است، پس داریم:

$$Q_1 = \frac{14 + 15}{2} = 14,5 \Rightarrow \text{چارک اول } b = 14,5$$

$$Q_3 = \frac{21 + 24}{2} = 22,5 \Rightarrow \text{چارک سوم } d = 22,5$$

$$\frac{b+d}{2} - c = \frac{14,5 + 22,5}{2} - 19 = 18,5 - 19 = -0,5$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1 + 7 + 5 + 9 + 8}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$s = 9 - 1 = 8 = \text{کمترین داده} - \text{بیشترین داده} = \text{دامنه تغییرات}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (9-6)^2 + (8-6)^2}{5} = \frac{25 + 1 + 1 + 9 + 4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

مجموع فراوانی‌های نسبی  $N$  داده‌ی آماری، برابر یک است.

$$= 1 \Rightarrow 0,35 + a + b + 0,15 + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 - 0,5 \Rightarrow a + b + c = 0,5$$

$$\rightarrow 3a + 3b + 3c = 3(a + b + c) = 3 \times 0,5 = 1,5$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

$$\text{تعداد کل داده‌ها} = 5 + 7 + 5 + 9 + 4 = 30$$

$$C \text{ درصد فراوانی گروه} = \frac{\text{فراوانی گروه } C}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times 100 = \frac{5}{30} \times 100 \approx 16,6$$

$$\frac{31}{2} = 15,5 \text{ است. میانگین میانه و مد نیز } 17 \text{ است. میانگین میانه و مد برابر است با: } \frac{31}{2} = 15,5$$

$$\text{داده‌هایی که مقدار آن‌ها به اشتباه، } 15 \text{ محاسبه شده است در نیمه دوم داده‌ها یعنی بعد از میانه قرار دارند. پس با افزایش آن‌ها میانه تغییر نمی‌کند ولی میانگین}$$



افزایش می یابد.

# پاسخنامه کلیپی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴