



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: آمار و احتمال ۱۱ ریاضی فصل ۴ (تستی)

تاریخ آزمون:

۱ در بررسی ویژگی‌های مگس‌های سفید مزاحم در شهر تهران، هر مگس یک در این مطالعه آماری است و همه جامعه آماری است.

- ۱ نمونه - مگس‌های سفید ۲ واحد آماری - مگس‌های سفید ۳ نمونه - حشرات ۴ واحد آماری - حشرات

۲ می‌خواهیم از بین ۲۵۸ دانش‌آموزان کلاس دهم، ۸۱۷ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۴۷۳ دانش‌آموز کلاس دوازدهم به صورت طبقه‌ای نمونه‌ای ۱۴۴ عضوی، از بین این ۱۴۴ نفر، ۵۲ نفر، از بین این ۵۲ نفر، ۱۲ نفر و در نهایت از بین این ۱۲ نفر ۲ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این که این دو نفر در یک پایه باشند چقدر است؟

- ۱ $\frac{۴۸۲}{۱۲۶۰}$ ۲ $\frac{۵}{۱۲}$ ۳ $\frac{۱۴۴}{۲۵۸}$ ۴ $\frac{۵۰۹}{۱۲۸۷}$

۳ در تعریف جامعه آماری کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ مجموعه‌ای شامل قسمتی از واحدهای آماری است. ۲ همه افراد و اشیاء آماری که در دسترس آمارگیران هستند.
۳ مجموعه‌ای شامل کل واحدهای آماری است. ۴ تمام افراد و یا اشیاء داده شده که در آماره یا پارامتر هستند.

۴ نمونه‌گیری به دو روش کلی و یا صورت می‌گیرد.

- ۱ خوشه‌ای - طبقه‌ای ۲ احتمالی - غیراحتمالی ۳ تصادفی - غیرتصادفی ۴ سیستماتیک - سامانمند

۵ برای نظرسنجی در مورد تغییر ساعت رسمی کشور در نیمه اول هر سال، چه تعداد از روش‌های نمونه‌گیری زیر اریب هستند؟

- الف) افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب کنیم.

ب) پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال نماییم.

پ) از دفترچه راهنمای تلفن، تعدادی شماره به تصادف انتخاب کنیم.

ت) یک نمونه غیرتصادفی انتخاب کنیم (افراد حاضر در نمونه از قبل مشخص شده باشند).

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۶ در کدام گزینه تمام متغیرهای کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کمی پیوسته و کمی گسسته وجود دارند؟

- ۱ سن، جنسیت، میزان تحصیلات، شغل ۲ وزن، تعداد فرزندان، جنسیت، شغل
۳ سرعت حرکت یک خودرو، گروه خون، مراحل رشد، تعداد فرزندان ۴ تعداد تماس‌ها، مراحل تحصیل، رنگ چشم، گروه خون

۷ وزن ۵ قطعه طلا برحسب گرم به صورت ۲، ۲، ۳، ۴، ۵ است اگر یک نمونه ۳ تایی از این قطعات انتخاب شود با کدام احتمال میانگین عددی بیشتر

از ۳ را برآورد می‌کند؟

- ۱ ۰٫۲ ۲ ۰٫۳ ۳ ۰٫۴ ۴ ۰٫۵

۸ در فضای نمونه‌ای شامل اعداد طبیعی یک رقمی، با کدام احتمال برآورد نقطه‌ای میانگین توسط یک نمونه دوعضوی بزرگ‌تر از ۶ است.

- ۱ $\frac{۱}{۶}$ ۲ $\frac{۲}{۹}$ ۳ $\frac{۱}{۳}$ ۴ $\frac{۱}{۴}$

۹ در نمونه‌گیری تصادفی ساده از ۱۲ نفر بدون جایگذاری می‌خواهیم ۳ نفر را انتخاب کنیم احتمال این که فرد بخصوص جزو این ۳ نفر باشد، کدام

است؟

- ۱ $\frac{۱}{۱۲}$ ۲ $\frac{۱}{۳}$ ۳ $\frac{۱}{۴}$ ۴ $(\frac{۱}{۱۲})^۳$



۱۰ فرض کنید جامعه‌ای از ۴ نفر تشکیل شده باشد و می‌خواهیم میانگین قد آن‌ها را با استفاده از نمونه‌ای به اندازه ۲ برآورد کنیم. جدول احتمالات به صورت زیر است و \bar{x} ها از چپ به راست به صورت صعودی چیده شده است. حال $p \times k$ کدام است؟

نمونه	{1۷۲, 1۷۵}				
\bar{x}	a	b	۱۷۵٫۵	k	c
احتمال		p			

① $\frac{1۷۶٫۵}{۳}$

② ۵۹

③ ۶۰

④ اطلاعات کافی نیست

۱۱ نمراتی که یک استاد فیزیک دانشگاه تهران به ۱۰ دانشجو داده است برابر ۱۵، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۹، ۲۰، ۲۰، ۱۱، ۱۹، ۱۷ و ۱۵ می‌باشد. برآورد نقطه‌ای میانگین کل نمراتی که این استاد به دانشجویان داده است کدام است؟

① ۱۵

② ۱۶٫۵

③ ۱۷

④ ۱۷٫۵

۱۲ منطقه یک آموزش و پرورش ۱۰ حوزه امتحان نهایی دارد. مسئول نظارت بر امتحانات نهایی به تمام حوزه‌ها سرکشی کرده ولی در هر حوزه فقط از ۱۰ درصد دانش آموزان در مورد رضایت و سلامت برگزار شدن امتحانات تحقیق به عمل می‌آورد. این روش نمونه‌گیری نام دارد.

① تصادفی ساده

② خوشه‌ای

③ طبقه‌ای

④ سامانمند

۱۳ در یک جلسه شورای دانش آموزی ۲۶۰ نفر حضور دارند و روی ۲۶۰ صندلی به شماره‌های ۱ تا ۲۶۰ نشسته‌اند. در انتخاب یک نمونه n نفری از آنان به روش سیستماتیک، اگر نفر چهارم انتخاب شده روی صندلی شماره ۴۷ و نفر دوازدهم روی صندلی شماره ۱۵۱ باشد آن گاه نفر دوم روی کدام صندلی نشسته است؟

① ۲۱

② ۲۳

③ ۱۷

④ ۱۹

۱۴ در جامعه $\left\{ \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{1}{35}, \dots, \frac{1}{168} \right\}$ برآورد نقطه‌ای میانگین کل جامعه تقریباً کدام است؟

① ۰٫۰۱

② ۰٫۰۲

③ ۰٫۰۴

④ ۰٫۰۵

۱۵ در جامعه $\{۵, ۷, ۴٫۵, ۲, ۱, ۶, ۸, ۲\}$ حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار برآورد نقطه‌ای میانگین جامعه برای نمونه‌ای ۵ عضوی کدام است؟

① ۱۷٫۶۹

② ۲۲٫۵۷

③ ۱۶٫۸۷

④ ۱۹٫۲۳

۱۶ در نمونه‌گیری تصادفی ساده و بدون جای‌گذاری از ۱۰ نفر، اگر بدانیم در انتخاب اول محمد انتخاب شده است و از انتخاب دوم و سوم اطلاع نداشته باشیم، احتمال این که جمال در چهارمین انتخاب عضو نمونه باشد چقدر است؟ (محمد و جمال دو نفر از آن ۱۰ نفر هستند).

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{9}$

③ $\frac{1}{8}$

④ $\frac{1}{7}$

۱۷ در یک برنامه تلویزیونی، دویست هزار نفر در نظرسنجی پیامکی شرکت کرده‌اند و قرار است به ۵ نفر به قید قرعه جایزه داده شود، مهمان برنامه از بین اعداد ۱ تا ۴۰۰ هزار یک عدد را انتخاب می‌کند و سپس به این عدد ۴۰ هزار تا ۴۰ هزار تا اضافه می‌کند تا پنج برنده معلوم شوند. از کدام روش نمونه‌گیری استفاده شده است؟

① تصادفی ساده

② سامانمند

③ طبقه‌ای

④ خوشه‌ای

۱۸ می‌خواهیم یک تحقیق در مورد ورزش‌های مورد علاقه دانشجویان یک دانشگاه انجام دهیم. برای انجام این کار سه دانشکده از میان دانشکده‌های این دانشگاه را به تصادف انتخاب کرده و از تمام دانشجویان این سه دانشکده تحقیق می‌کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

① هر دانشجو یک واحد آماری است.

② تمام دانشجویان سه دانشکده انتخاب شده، جامعه آماری را تشکیل می‌دهند.

③ نمونه‌گیری به روش خوشه‌ای انجام گرفته است.

④ تعداد ورزش‌های مورد علاقه دانشجویان این سه دانشکده، یک آماره است.

۱۹ در نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازه $n = ۲$ از جامعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، احتمال انتخاب نمونه‌ای که میانگین جامعه را به‌طور دقیق برآورد کند، کدام است؟

① ۰٫۱

② ۰٫۲

③ ۰٫۳

④ ۰٫۴



۲۰) چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی هستند؟

میزان آلاینده‌گی هوا - تعداد گل‌های زده شده توسط لیونل مسی در هر بازی جام باشگاه‌های اروپا - شماره پلاک اتومبیل‌های تبریز - میزان تحصیلات

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱



پاسخنامه تشریحی

۱) هریک از افراد یا اشیائی می‌گویند که داده‌های آنها در یک بررسی آماری جمع‌آوری می‌شود پس هر مگس سفید یک واحد آماری است و به مجموعه کل واحدهای آماری جامعه آماری می‌گویند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۲) چون می‌خواهیم از هر پایه متناسب با تعداد دانش‌آموزان آن پایه نمونه‌گیری کنیم باید از ۱۴۴ نفر $144 \times \frac{258}{258 + 817 + 473} = 24$ نفر $144 \times \frac{817}{258 + 817 + 473} = 76$ نفر $144 \times \frac{473}{258 + 817 + 473} = 44$ نفر دانش‌آموز یازدهمی و دانش‌آموز دوازدهمی انتخاب شود. می‌دانیم آن کارهای وسط تأثیری ندارد و احتمال برابر است با ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

برابر است با $\frac{24}{2} + \frac{76}{2} + \frac{44}{2} = \frac{24 + 76 + 44}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{\binom{24}{2} + \binom{76}{2} + \binom{44}{2}}{\binom{144}{2}} = \frac{276 + 2850 + 946}{10296} = \frac{4072}{10296} = \frac{509}{1287}$$

۳) جامعه آماری شامل کل واحدهای آماری است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۴) گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ خود از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی هستند. گزینه ۲ روش‌های کلی را عنوان می‌کند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۵) تمامی روش‌های نمونه‌گیری ذکر شده اریب هستند. در واقع اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، آن روش نمونه‌گیری اریب است. مثلاً ارسال ایمیل یا انتخاب از روی دفترچه راهنمای تلفن ممکن است گروه‌هایی از جامعه را از انتخاب حذف نماید. همین وضعیت در مورد انتخاب یک نمونه در دسترس یا یک نمونه غیر تصادفی نیز وجود دارد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۶) سرعت حرکت یک خودرو، متغیر کمی پیوسته، گروه خون متغیر کیفی اسمی، مراحل رشد متغیر کیفی ترتیبی و تعداد فرزندان متغیر کمی گسسته است، بنابراین در گزینه ۳، تمام متغیرهای چهارگانه موجود هستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

در گزینه ۱، هردو متغیر «جنسیت» و «شغل» کیفی اسمی، متغیر «سن» کمی پیوسته و متغیر «میزان تحصیلات» کیفی ترتیبی است.

در گزینه ۲، هردو متغیر «جنسیت» و «شغل» کیفی اسمی، متغیر «وزن» کمی پیوسته و متغیر «تعداد فرزندان» کمی گسسته است.

در گزینه ۴، هردو متغیر «رنگ چشم» و «گروه خون» کیفی اسمی، متغیر «تعداد تماس‌ها» کمی گسسته و متغیر «مراحل تحصیل» کیفی ترتیبی است.

۷) $\binom{5}{3} = 10$ عدد داریم به ۵ عدد داریم به ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

$$\frac{a+b+c}{3} > 3$$

یا مجموع آنها بیشتر از ۹ شود و آنها عبارتند از:

$$\{2, 3, 5\} \times 2, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\} \times 2$$

پس احتمال آنکه میانگین نمونه ۳ تایی عددی بیشتر از ۳ را برآورد کند برابر است با:

$$\frac{5}{\binom{5}{3}} = 0.5$$

۸) در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ حداکثر مقدار میانگین یک نمونه دو عضوی $\frac{8+9}{2} = 8.5$ است. اگر A پیشامدی باشد که میانگین یک نمونه دو عضوی بزرگ‌تر از ۶ باشد باید همه نمونه‌های دو عضوی را چنان ببایم که میانگین آن‌ها برابر 6.5 ، 7 ، 8 ، 8.5 ، 9 باشد. این نمونه‌های دو عضوی عبارت‌اند از: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

$A = \{(4, 9), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9), (8, 9)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{\binom{9}{2}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

برای به دست آوردن تعداد اعضای پیشامد مطلوب، فرد بخصوص را انتخاب کرده و ۲ نفر دیگر را از بین ۱۱ نفر دیگر انتخاب می‌کنیم. احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \frac{\binom{11}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{11!}{2! \times 9!}}{\frac{12!}{3! \times 9!}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۱۰) $\binom{4}{2} = 6$ در کل ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

از آنجایی که بالای a فقط ۱ نمونه وجود دارد احتمال زیر a برابر است با $\frac{1}{6}$ ، چون \bar{x} به صورت صعودی چیده شده اند کوچکترین دو عدد 172 و 175 هستند. اگر عدد بعدی دوباره 175 باشد



باید در بالای a ، دوبار می آمد، پس عدد بعدی از ۱۷۵ بزرگتر است، اگر اعداد بزرگتر از ۱۷۵ هر دو برابر باشند. باید بالای b ، ۲ نمونه بیاید و بالای ۱۷۵٫۵ نیز ۲ نمونه بیاید و فقط ۱ نمونه می ماند که بالای k و c می بیاید که امکان پذیر نیست، پس اعداد بزرگتر از ۱۷۵ متفاوت هستند فرض کنیم x و y باشند به طوری که $x < y$. در این صورت بالای b ، ۱ نمونه $\{x, 172\}$ می آید، بالای k ، یک نمونه $\{175, y\}$ و بالای c ، نمونه $\{x, y\}$ می آید، در نتیجه بالای ۱۷۵٫۵، باید دو نمونه بیاید و p برابر است با $\frac{2}{6}$ ، بالای ۱۷۵ نمونه های $\{172, y\}$ و $\{175, x\}$ می آید.

$$\frac{172 + y}{2} = 175,5 \Rightarrow y = 351 - 172 = 179$$

$$\frac{175 + 179}{2} = 177$$

$$pk = \frac{177 \times 2}{6} = \frac{177}{3} = 59$$

در نتیجه k برابر است با:

۱۱) ۱ ۲ ۳ ۴

بر آورد نقطه ای میانگین کل نمرات این استاد برابر میانگین ۱۰ نمره داده شده است.

$$\text{میانگین نمرات داده شده} = \frac{15 + 17 + 17 + 19 + 20 + 20 + 11 + 19 + 17 + 15}{10} = \frac{170}{10} = 17$$

چون تمام خوشه ها انتخاب شده اند ولی در هر خوشه از چند نفر تحقیق شده این روش نمونه گیری طبقه ای نام دارد.

۱۲) ۱ ۲ ۳ ۴

۱۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 47 \\ a_{12} = a_1 + 11d = 151 \end{cases} \Rightarrow 8d = 151 - 47 = 104 \Rightarrow d = 13$$

$$\Rightarrow a_1 + (3 \times 13) = 47 \Rightarrow a_1 = 47 - 39 = 8$$

$$\Rightarrow a_4 = a_1 + d = 8 + 13 = 21$$

۱۴) ۱ ۲ ۳ ۴ مجموع اعضای جامعه را به دست می آوریم:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{143} + \frac{1}{168} = \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{12 \times 14}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{11 \times 13} + \frac{2}{12 \times 14} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{364 + 273 - 84 - 78}{1092} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{475}{1092} \right) = \frac{475}{2184} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{475}{2184} = \frac{95}{4368} \approx 0,02$$

۱۵) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا اعداد را مرتب می کنیم:

۱, ۲, ۲, ۴, ۵, ۵, ۶, ۷, ۸

بیشترین مقدار بر آورد برابر است با:

$$\frac{4,5 + 5 + 6 + 7 + 8}{5} = \frac{30,5}{5} = 6,1$$

کمترین مقدار بر آورد برابر است با:

$$\frac{1 + 2 + 2 + 4,5 + 5}{5} = \frac{14,5}{5} = 2,9$$

و حاصل برابر است با: $6,1 \times 2,9 = 17,69$

۱۶) ۱ ۲ ۳ ۴ از آنجایی که نمونه گیری بدون جای گذاری است و در انتخاب اول محمد انتخاب شده است، پس ۹ نفر دیگر باقی می ماند، پس احتمال این که جمال در چهارمین

انتخاب عضو نمونه باشد، چون از انتخاب دوم و سوم اطلاع نداریم، همان $\frac{1}{9}$ است:

$$\frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{9}$$

۱۷) ۱ ۲ ۳ ۴ از آنجایی که جامعه به ۵ طبقه هم اندازه (با اندازه ۴۰ هزار) تقسیم شده است و فقط از طبقه اول واحد آماری به تصادف انتخاب شده است و همان رویه تکرار

شده است (چهل هزار تا چهل هزار تا جلو رفته است) از روش نمونه گیری سیستماتیک (سامانمند) استفاده شده است.

۱۸) ۱ ۲ ۳ ۴ در این تحقیق، هر دانشجو یک واحد آماری است ولی جامعه آماری که شامل مجموعه کل واحدهای آماری می شود، تمامی دانشجویان این دانشگاه هستند. با

توجه به این که نمونه گیری از تعدادی از دانشجویان انجام پذیرفته است، پس تعداد ورزش های مورد علاقه دانشجویان این سه دانشکده، یک آماره یا آماره نمونه است و چون از تمام دانشجویان سه دانشکده انتخابی، نمونه گیری صورت گرفته است، نمونه گیری به روش خوشه ای انجام پذیرفته است.

۱۹) ۱ ۲ ۳ ۴ میانگین جامعه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$$

نمونه های دوتایی از این جامعه که میانگین را برابر ۳ بر آورد می کنند، عبارتند از $\{1, 5\}$ و $\{2, 4\}$. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \frac{2}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

۲۰) ۱ ۲ ۳ ۴ متغیرها داده شده به ترتیب: کیفی ترتیبی، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی هستند.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴