نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰دقیقه

نام آزمون: امار و احتمال ۱۱ ریاضی آزمون جامع

تستی

تاریخ آزمون:

۱ برای سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C، اگر $A \times B = B \times C$ باشد، آن‌گاه کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) $A \times C = B \times C$ ۲) $B^2 = C^2 - A^2$ ۳) $(A \cup C) \times (A \cup B) = A^2$ ۴) $(B \cap C) \times (B \cap A) = B^2$

۲ اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم مجموعهٔ $[A - (A - B)] \cup B$ کدام است؟

۱) B ۲) B' ۳) $A \cup B$ ۴) $A' \cap B'$

۳ در حکم هر مثلث مفروض به شرطی قائم‌الزاویه است که متساوی‌الساقین باشد، شرط متساوی‌الساقین بودن چگونه شرطی است؟

۱) غیر لازم ولی کافی ۲) لازم و نه کافی ۳) نه لازم نه کافی ۴) لازم و کافی

۴ در یک سمینار علمی، ۵ ریاضیدان و ۳ فیزیکدان می‌خواهند سخنرانی کنند. احتمال آن که دومین و پنجمین سخنران، فیزیکدان باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲۸}$ ۲) $\frac{۹}{۶۴}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۵ آقای رامبد جوان در برنامهٔ خندوانه می‌خواهد از بین ۷۰ تماشاچی که هرکدام شماره‌های ۱ تا ۷۰ را دارند ۵ نفر را تصادفی انتخاب و به آنها جایزه دهد. برای انتخاب این نمونه از کدام روش نمونه گیری استفاده شده است؟

۱) تصادفی ساده ۲) خوشه‌ای ۳) طبقه‌ای ۴) سامانمند

۶ اگر $A = \{۱, ۲, \{۱, ۲\}, \{۲, ۱\}\}$ و $B = \{(۱, ۲), (۱, ۱)\}$ آن‌گاه مجموعهٔ $A^2 - A \times B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۷ تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج آمد، یک تاس دیگر و در غیر این صورت، به تعداد عدد ظاهر شده سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۸ فرض کنید $C = (A - B) \cup (B - A)$. حاصل $(A' \cap B')' \cap C'$، کدام است؟

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) C ۴) C'

۹ در یک مدرسه ۱۵ درصد دانش‌آموزان به بسکتبال، ۲۰ درصد به والیبال و بقیه به فوتبال علاقه دارند. اگر تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به فوتبال ۷۲ نفر از علاقه‌مندان به والیبال بیش‌تر باشد، چند نفر به بسکتبال علاقه دارند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۲

۱۰ سه ظرف ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب دارای «دو مهرهٔ قرمز و سه مهرهٔ سیاه»، «یک مهرهٔ قرمز و چهار مهرهٔ سیاه»، «سه مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ سیاه» هستند. یکی از ظرف‌ها را به‌تصادف انتخاب کرده و از آن مهره‌ای برمی‌داریم. اگر این مهره قرمز باشد، احتمال اینکه ظرف انتخاب‌شده ظرف ۱ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۲۵}$ ۲) $\frac{۸}{۲۷}$ ۳) $\frac{۷}{۲۵}$ ۴) $\frac{۷}{۲۷}$

۱۱ در پرتاب دو تاس، مجموع دو عدد روشده، عددی اول است. به چه احتمالی هر دو عدد روشده، عدد اول هستند؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۱۲) دسته‌ای کارت شامل ۳ کارت دو رو سفید، ۴ کارت دو رو مشکی و ۴ کارت یک رو سفید و یک رو مشکی داریم. کارتی به تصادف از این دسته کارت انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم. اگر روی مشاهده شده مشکی باشد، احتمال آنکه روی دیگر این کارت نیز مشکی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۴}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۳) اگر بخواهیم ضریب تغییرات تعدادی داده را نصف کنیم، باید .....

۱) تمام داده‌ها را دو برابر کنیم.
۲) تمام داده‌ها را نصف کنیم.
۳) تمام داده‌ها را با نصف میانگین آنها جمع کنیم.
۴) تمام داده‌ها را با مقدار میانگین آنها جمع کنیم.

۱۴) اگر میانگین و مد در داده‌های ۵۰، ۴۵، ۱۵، ۶۰، x و ۵۵ با هم برابر باشند، میانهٔ داده‌ها کدام است؟

۱) ۴۷٫۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲٫۵ ۴) ۵۵

۱۵) اگر $P(A|B) = ۱$، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $P(B - A) = ۰$ ۲) $P(A \cap B) = \frac{۱}{۲}$ ۳) $B \subseteq A$ ۴) $P(A \cap B) = P(B)$

۱۶) ده کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک متفاوت را در یک ردیف قرار می‌دهیم. احتمال اینکه هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم نباشند. چقدر است؟

۱) $\frac{۹۹۰}{۱۳!}$ ۲) $\frac{۵}{۵۲}$ ۳) $\frac{۱۶۵}{۱۳!}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

۱۷) A، B و C در سه طبقهٔ متمایز از یک برج هفت طبقه ساکن‌اند. احتمال آنکه خانهٔ A بالاتر از B و خانهٔ B بالاتر از C باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۶}{۳۵}$

۱۸) در جامعهٔ $\{\frac{۱}{۱۶۸}, \cdots, \frac{۱}{۳۵}, \frac{۱}{۲۴}, \frac{۱}{۱۵}\}$ برآورد نقطه‌ای میانگین کل جامعه تقریباً کدام است؟

۱) ۰٫۰۱ ۲) ۰٫۰۲ ۳) ۰٫۰۴ ۴) ۰٫۰۵

۱۹) در جامعه‌ای با اعضای متمایز مجموع تعداد نمونه‌های ۱عضوی و ۲عضوی، ۱۰۵ است، تعداد نمونه‌های ۳عضوی این جامعه چقدر است؟

۱) ۴۵۵ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۸۶ ۴) ۳۶۴

۲۰) مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعهٔ داده‌ها داشته باشد، کدام‌یک از معیارهای گرایش به مرکز را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد؟

۱) میانگین ۲) میانه ۳) مد ۴) هر سه معیار

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر A و B و C و D چهار مجموعهٔ غیرتهی باشند؛ داریم:

$$A\times B=C\times D\Rightarrow\begin{cases}A=C\\ \text{و}\\ B=D\end{cases}$$

$$A\times B=B\times C\xrightarrow{A,B,C\neq\varnothing}\begin{cases}A=B\\ B=C\end{cases}\Rightarrow A=B=C$$

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ درست هستند و گزینهٔ ۲ نادرست است.

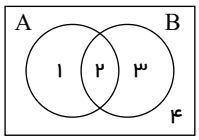
زیرا با نتایج فوق: $C^{۲}-A^{۲}=A^{۲}-A^{۲}=\varnothing$ و $B^{۲}\neq\varnothing$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

$$[A-(A-B)]\cup B=[A-(A\cap B')]\cup B\,,\ (A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$$

$$=[A\cap(A'\cup B)]\cup B=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup B=(A\cap B)\cup B=B\xrightarrow{\text{متمم}}B'$$

روش دوم: با استفاده از نمودار ون زیر داریم:



$$[A-(A-B)]\cup B=[(۱,۲)-(۱)]\cup(۲,۳)=(۲)\cup(۲,۳)=(۲,۳)=B\xrightarrow{\text{متمم}}B'$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: در رابطهٔ $p\Rightarrow q$، p شرط کافی برای q و q شرط لازم برای p می‌باشد.

در این قسمت اگر p گزارهٔ مثلث قائم‌الزاویه بوده و q مثلث متساوی‌الساقین باشند هیچ‌یک از گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$ درست نیست پس گزینهٔ ۳ درست است.

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ چون در مورد وضعیت سایر نفرات صحبتی نشده است پس احتمال آنکه نفر دوم و پنجم فیزیکدان باشند برابر آن است که نفرات اول و دوم فیزیکدان باشند یعنی:

$$\text{جواب}=\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۶}{۵۶}=\frac{۳}{۲۸}$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ چون ۵ نفر از بین کل افراد انتخاب شده‌اند پس نمونه براساس روش نمونه گیری تصادفی ساده انتخاب شده است.

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

یادآوری می‌شود که $\{۱,۲\}=\{۲,۱\}$، بنابراین مجموعهٔ A مجموعه‌ای سه عضوی است که هیچ کدام از اعضایش با B مشترک نیست:

$$|A^{۲}-A\times B|=|A\times(A-B)|$$

$$|A|\times|A-B|=۳\times۳=۹$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای: به مجموعه همه‌ی نتایج حاصل از یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای می‌گویند.

نکته: تعداد حالات ممکن در پرتاب n سکه برابر ۲^{n} می‌باشد.

پرتاب تاس دیگر
- تاس زوج بیاید
- تاس فرد بیاید

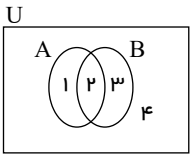
به تعداد رقم ظاهر شده سکه پرتاب کنیم

$$n(S)=\underbrace{۳}_{\text{تاس زوج بیاید}}\times\underbrace{۶}_{\text{پرتاب تاس دوم}}\overset{\text{یا}}{+}(\underbrace{۱}_{\text{۱بیاید}}\times\underbrace{۲^{۱}}_{\text{۲سکه}}\ \text{پرتاب}+\underbrace{۱}_{\text{۳بیاید}}\times\underbrace{۲^{۳}}_{\text{۳سکه}}\ \text{پرتاب}+\underbrace{۱}_{\text{۵بیاید}}\times\underbrace{۲^{۵}}_{\text{۵سکه}}\ \text{پرتاب})=۶۰$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ فرض کنید نواحی موجود در نمودار ون دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت شکل زیر شماره‌گذاری کنیم. در این صورت مجموعهٔ C شامل نواحی ۱ و ۳ است و داریم:

$$(A'\cap B')'\cap C'=(A\cup B)\cap C'=\{۱,۲,۳\}\cap\{۲,۴\}=\{۲\}$$

مطابق شکل ناحیهٔ «۲» معادل مجموعهٔ $A\cap B$ است.



۹ ۱ ۲ ۳ ۴

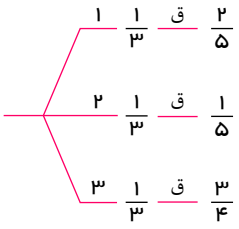
درصد دانش‌آموزان علاقه‌مند به فوتبال $= ۱۰۰ - (۱۵ + ۲۰) = ۶۵$

اگر تعداد کل دانش‌آموزان مدرسه را n بگیریم، داریم:

$$\frac{۶۵}{۱۰۰}n - \frac{۲۰}{۱۰۰}n = ۷۲ \Rightarrow \frac{۴۵}{۱۰۰}n = ۷۲ \Rightarrow n = ۱۶۰$$

تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به بسکتبال $= \frac{۱۵}{۱۰۰} \times ۱۶۰ = ۲۴$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار درختی:



$$P(\text{ق}) = \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۳}{۴} = \frac{۸}{۶۰} + \frac{۴}{۶۰} + \frac{۱۵}{۶۰} = \frac{۲۷}{۶۰}$$

$$P(\text{ظرف ۱} \mid \text{ق}) = \frac{P(\text{ظرف ۱ و ق})}{P(\text{ق})} = \frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۵}}{\frac{۲۷}{۶۰}} = \frac{\frac{۲}{۱۵}}{\frac{۲۷}{۶۰}} = \frac{۸}{۲۷}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای «هر دو عدد، عدد اول باشند.» و «مجموع دو عدد، عددی اول باشد.» تعریف شوند، آن‌گاه داریم:

$$A = \{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$$

$$B = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۳),(۵,۲),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۵)\} \Rightarrow n(B) = ۱۵$$

$$A \cap B = \{(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۵,۲)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۴$$

بنابر فرمول احتمال شرطی داریم:

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴}{۱۵}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر پیشامد A را مشکی بودن روی مشاهده شدهٔ کارت و پیشامدهای B ، C و D را به‌ترتیب انتخاب کارت دو رو سفید، انتخاب کارت دو رو مشکی و انتخاب کارت یک رو مشکی و یک رو سفید در نظر بگیریم. آنگاه طبق قانون احتمال کل و قانون بیز داریم:

قانون احتمال کل : $P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D) = \frac{۳}{۱۱} \times ۰ + \frac{۴}{۱۱} \times ۱ + \frac{۴}{۱۱} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۱۱} \times \frac{۳}{۲}$

طبق قاعده بیز داریم:

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(A)} = \frac{\frac{۴}{۱۱} \times ۱}{\frac{۴}{۱۱} \times \frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + \bar{x}} = \frac{\sigma}{۲\bar{x}} = \frac{۱}{۲}CV_{\text{قدیم}}$$

اگر بخواهیم ضریب تغییرات نصف شود کافی است داده‌ها را با مقدار میانگین جمع کنیم.

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را بین داده‌ها داشته باشد، هر دادهٔ معلوم تنها یک‌بار تکرار شده است پس x باید با یکی از داده‌ها برابر باشد تا به‌عنوان مد در نظر گرفته شود از طرفی میانگین با مد برابر است پس x همان میانگین است:

$$x = \bar{x} = \frac{۵۵ + x + ۶۰ + ۱۵ + ۴۵ + ۵۰}{۶} \Rightarrow ۶x = x + ۲۲۵ \Rightarrow ۵x = ۲۲۵ \Rightarrow x = ۴۵$$

حال داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۱۵، ۴۵، ۴۵، ۵۰، ۵۵، ۶۰

چون تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو دادهٔ وسط همان میانه می‌باشد یعنی:

$$\text{میانه} = Q_۲ = \frac{۴۵ + ۵۰}{۲} = ۴۷/۵$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق رابطهٔ احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۱ \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow P(B - A) = ۰$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا کتاب‌های ریاضی به $۱۰!$ حالت جابه‌جا می‌شوند مطابق شکل، ۱۱ جای خالی داریم که باید با انتخاب ۳ جا از ۱۱ جا $\binom{۱۱}{۳}$ کتاب‌های فیزیک را در آنها جای دهیم. در آخر کتاب‌های فیزیک $۳!$ جای‌گشت دارند.

$$_R_\underset{\times}{R}_\underset{\times}{R}_R_R_\underset{\times}{R}_R_R_$$

$$P(A)=\frac{۱۰!\times\binom{۱۱}{۳}\times ۳!}{۱۳!}=\frac{۱۵}{۲۶}$$

۱۷ ۱ **۲** ۳ ۴

۷ طبقه داریم و این ۳ نفر هرکدام در یکی از طبقه‌های این برج ساکن‌اند. فضای نمونه‌ای این سؤال، برابر $۵\times ۶\times ۷$ است. پیشامد مطلوب این است که «خانهٔ A بالاتر از B و خانهٔ B بالاتر از C باشد.» تعداد عضوهای این پیشامد $\binom{۷}{۳}$ است. چون از این ۷ طبقه‌ای که وجود دارد، هر ۳ طبقه‌ای را که انتخاب کنیم، یک حالت به ما می‌دهد که A بالاتر از B و B بالاتر از C باشد. پس $n(A)=\binom{۷}{۳}$ است. داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۳}}{۷\times ۶\times ۵}=\frac{\frac{۷!}{۳!۴!}}{۷\times ۶\times ۵}=\frac{\frac{۷\times ۶\times ۵}{۳!}}{۷\times ۶\times ۵}=\frac{۱}{۳!}=\frac{۱}{۶}$$

۱۸ ۱ **۲** ۳ ۴

مجموع اعضای جامعه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۳۵}+\cdots+\frac{۱}{۱۴۳}+\frac{۱}{۱۶۸}=\frac{۱}{۳\times ۵}+\frac{۱}{۴\times ۶}+\frac{۱}{۵\times ۷}+\cdots+\frac{۱}{۱۱\times ۱۳}+\frac{۱}{۱۲\times ۱۴}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳\times ۵}+\frac{۲}{۴\times ۶}+\frac{۲}{۵\times ۷}+\cdots+\frac{۲}{۱۱\times ۱۳}+\frac{۲}{۱۲\times ۱۴}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots+\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۱۳}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۴}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۳}-\frac{۱}{۱۴}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳۶۴+۲۷۳-۸۴-۷۸}{۱۰۹۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴۷۵}{۱۰۹۲}\right)=\frac{۴۷۵}{۲۱۸۴}\Rightarrow \text{میانگین}=\frac{\frac{۴۷۵}{۲۱۸۴}}{۱۰}=\frac{۹۵}{۴۳۶۸}\simeq ۰٫۰۲$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر تعداد اعضای کل جامعه را N بگیریم، طبق فرض داریم:

$$N+\frac{N(N-۱)}{۲}=۱۰۵\Rightarrow ۲N+N^۲-N=۲۱۰\Rightarrow N^۲+N-۲۱۰=۰\Rightarrow (N+۱۵)(N-۱۴)=۰\xrightarrow{N>۰}N=۱۴\Rightarrow \binom{۱۴}{۳}$$

$$=\frac{۱۴\times ۱۳\times ۱۲}{۶}=۳۶۴$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

می‌دانیم مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعهٔ داده‌ها داشته باشد، دادهٔ دورافتاده نامیده می‌شود. دادهٔ دور افتاده میانگین داده‌ها را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد در حالی که تأثیری بر میانه و مُد داده‌ها ندارد.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۱۱	۱	۲	۳	۴	۱۶	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۱۲	۱	۲	۳	۴	۱۷	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۳	۱	۲	۳	۴	۱۸	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴	۱۴	۱	۲	۳	۴	۱۹	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۲۰	۱	۲	۳	۴