نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۵دقیقه

نام آزمون: تابع قدر مطلق و تابع جز صحیح (تستی)

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=2-\frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۶

۲) در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2[x]$، مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱٫۷۵ ۲) ۲٫۲۵ ۳) ۲٫۵ ۴) ۲٫۷۵

۳) اگر مجموعه جواب معادلهٔ $[x+\frac{1}{2}]+[x+\frac{3}{2}]=3$ بازهٔ $[a,b)$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳

۴) کمترین مقدار تابع $f(x)=3|x+2|+|2x-4|$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۶

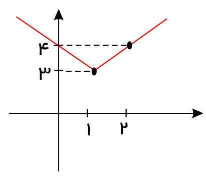
۵) تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x^2-1|=\sqrt{x}+\frac{1}{2}$ کدام است؟

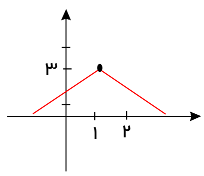
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

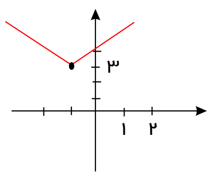
۶) مجموع جواب‌های معادله‌ی $|2x+1|=|x-2|$ کدام است؟

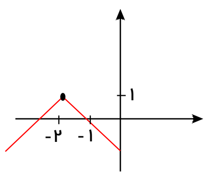
۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۷) نمایش تابع $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}+3$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۸) اگر n یک عدد طبیعی باشد و حاصل $[\sqrt{25n^2+7n}]$ برابر ۱۰، باشد مقدار $[\frac{15}{n^2}]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزءصحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

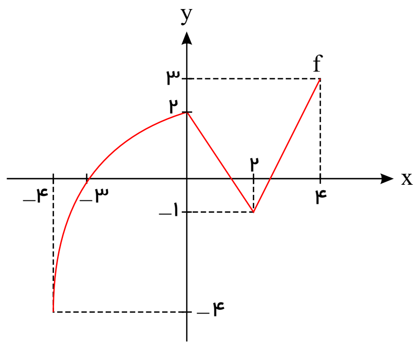
۹) اگر بازهٔ (a,b) جواب نامعادلهٔ $\left|2-\frac{x+3}{4}\right|<2$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۰) اگر بتوانیم مجموعه جواب نامعادلهٔ $|3x-5|<x$ را به‌صورت $|x-a|<b$ بنویسیم a^2+b^2 کدام است؟

۱) $\frac{125}{32}$ ۲) $\frac{32}{125}$ ۳) $\frac{125}{64}$ ۴) $\frac{64}{125}$

۱۱ با توجه به نمودار تابع f، محدودهٔ تغییرات تابع $g(x)=|-۲f(x)|$ کدام است؟



۱) $[۰,۶]$

۲) $[۰,۸]$

۳) $[-۴,۶]$

۴) $[-۴,۸]$

۱۲ اگر $\alpha \neq |\alpha|$ و $|\beta|=\beta$ و $|\alpha|>|\beta|$ باشد حاصل $\sqrt{\alpha^۲-۲\alpha\beta+\beta^۲}+|\alpha+\beta|$ کدام است؟

۱) -۲β ۲) ۲α ۳) ۲β ۴) -۲α

۱۳ نامعادلهٔ $x<|۲x-۳|$ معادل کدام نامعادله است؟

۱) $|x-۲|<۱$ ۲) $|x-۱|<۲$ ۳) $۰<|x-۲|<۱$ ۴) $۰<|x-۱|<۱$

۱۴ اگر $a>۰>b$ باشد، حاصل $|a-b|+|a+۱|-|۱-b|$ چقدر است؟

۱) $۲a$ ۲) $۲b$ ۳) $۲a+۲b$ ۴) $۲a+۲b+۲$

۱۵ کدام رابطه همواره درست نیست؟

۱) $|a+b|\leq|a|+|b|$ ۲) $|a|-|b|\geq|a-b|$ ۳) $|a|-|b|\leq|a-b|$ ۴) $|a-b|\leq|a|+|b|$

۱۶ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{\frac{۱}{۲}x^۲+۶x+۱۸}=\sqrt{۲}+\sqrt{۸}x$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x-۳$ با دامنهٔ $\{x:|x-۱|<۲\}$ همواره چگونه است؟

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۱۸ اگر x از بازهٔ (a,b) انتخاب شود، نسبت فاصله x از ۳ به فاصله x از ۲−، بیشتر از ۲ واحد خواهد بود. بیشترین مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳}$ ۴) $\frac{۲۲}{۳}$

۱۹ مساحت محصور بین $f(x)=||x-۱|-۲|$ و محور xها کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۶

۲۰ مساحت محصور بین نمودار $f(x)=|x+۱|+|x+۳|$ و خط $y=-x$ کدام است؟

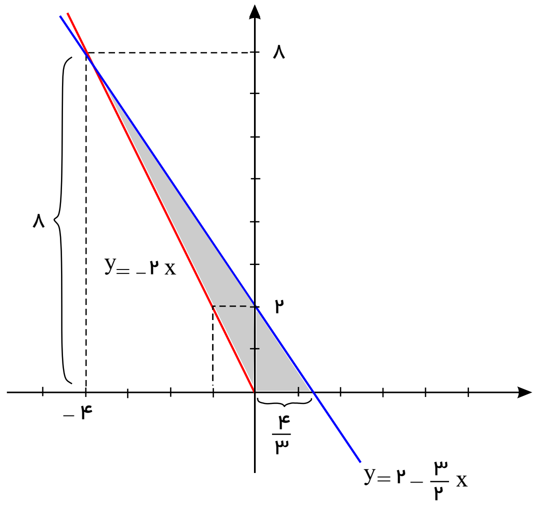
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$y=|x|-x=\begin{cases} x-x & x\ge ۰\\ -x-x & x<۰\end{cases}=\begin{cases} ۰ & x\ge ۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}$$

خط افقی $y=۰$ را به شرط $x\ge ۰$ و خط $y=-۲x$ با شرط $x<۰$ رسم می‌کنیم. برای رسم خط $y=-۲x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.$ را روی آن در نظر می‌گیریم و برای رسم خط $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\left|\begin{matrix}۰\\ ۲\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}\frac{۴}{۳}\\ ۰\end{matrix}\right.$ را روی آن در نظر می‌گیریم.



$$\Rightarrow S=\frac{۸\times\frac{۴}{۳}}{۲}=\frac{۱۶}{۳}$$

دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات $y=-۲x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$، آنها را تلاقی می‌دهیم.

$$۲-\frac{۳}{۲}x=-۲x\xrightarrow{\times ۲}۴-۳x=-۴x\rightarrow x=-۴$$

و x بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه‌ی تلاقی ۸ می‌شود.

۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$f(x)=x^۲-۲[x]\Rightarrow f(\sqrt{۳})=۳-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲[۱/۷]=۳-۲(۱)=۱$$

$$f(\frac{-۱}{۲}f(\sqrt{۳}))\overset{f(\sqrt{۳})=۱}{=\!=\!=}f(\frac{-۱}{۲})=(\frac{-۱}{۲})^۲-۲[\frac{-۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}-۲(-۱)=۲/۲۵$$

۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید و می‌دانیم اگر $[x]=n$ و $n\in\mathbb{Z}$ باشد آن‌گاه $n\le x<n+۱$ است.

$$[x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۳}{۲}]=۳\rightarrow[x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۱}{۲}+۱]=۳$$

$$\rightarrow[x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۱}{۲}]+۱=۳\rightarrow ۲[x+\frac{۱}{۲}]=۲\rightarrow[x+\frac{۱}{۲}]=۱$$

$$\rightarrow ۱\le x+\frac{۱}{۲}<۲\rightarrow\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۳}{۲}\rightarrow x\in[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})=[a,b)$$

$$\rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۳}{۲}\rightarrow a+b=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲$$

۴ **(۱)** (۲) (۳) (۴) نکته: اگر چند قدرمطلق با یکدیگر جمع شوند کمترین مقدار، توسط ریشهٔ یکی از قدرمطلق‌ها ایجاد می‌شود.

ریشه‌های داخل $f(x)$، $x=۲$ و $x=-۲$ می‌باشد خواهیم داشت:

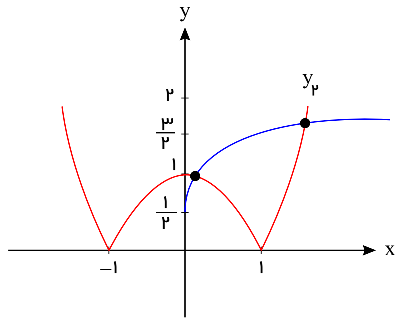
$$f(۲)=۱۲$$

$$f(-۲)=۸$$

بنابراین کمترین مقدار $f(x)$ برابر ۸ است.

۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴) برای حل معادله از روش ترسیم استفاده می‌کنیم و کافی است $y_۱=\sqrt{x}+\frac{۱}{۲}$ و $y_۲=\left|x^۲-۱\right|$ را در یک نمودار رسم کنیم.

بنابراین معادله دارای ۲ جواب است.



۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

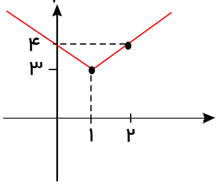
می‌دانیم اگر $|g|=|f|$ باشد آن‌گاه $f=g$ یا $f=-g$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{array}{l} 2x+1=x-2 \to x=-3 \\ 2x+1=-x+2 \to x=\frac{1}{3} \end{array} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -3+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$$

۷ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$y=\sqrt{(x-1)^2}+3 \Rightarrow y=|x-1|+3$$

کافی است $y=|x|$ را رسم کرده سپس آن را یک واحد به سمت راست و سه واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴) باید ببینیم $\sqrt{25n^2+7n}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. می‌دانیم که $\sqrt{(25n^2+10n+1)}=\sqrt{(5n+1)^2}=5n+1$ و $\sqrt{25n^2}=5n$ است.

داریم: $25n^2<25n^2+7n<25n^2+10n+1 \to (5n)^2<25n^2+7n<\sqrt{(5n+1)^2} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 5n<\sqrt{25n^2+7n}<5n+1$

$$\to \left[\sqrt{25n^2+7n}\right]=5n$$

از طرف با توجه به صورت سوال $\left[\sqrt{25n^2+7n}\right]=10$ پس:

$$5n=10 \Rightarrow n=2 \Rightarrow \left[\frac{15}{n^2}\right]=\left[\frac{15}{2^2}\right]=\left[\frac{15}{4}\right]=[3/\cdots]=3$$

۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\left|2-\frac{x+3}{4}\right|<2 \Rightarrow \frac{|8-x-3|}{4}<2 \Rightarrow |x-5|<8 \Rightarrow -8<x-5<8 \Rightarrow -3<x<13 \xrightarrow{x\in(a,b)} a=-3, b=13 \Rightarrow a+b=10$$

۱۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$x\geq\frac{5}{3} \to 3x-5<x \to 2x<5 \to x<\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \frac{5}{3}\leq x<\frac{5}{2}$$

$$x<\frac{5}{3} \to -3x+5<x \to -4x<-5 \to x>\frac{5}{4} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \frac{5}{4}<x<\frac{5}{3}$$

از اجتماع دو جواب به‌دست آمده به جواب $\frac{5}{4}<x<\frac{5}{2}$ می‌رسیم.

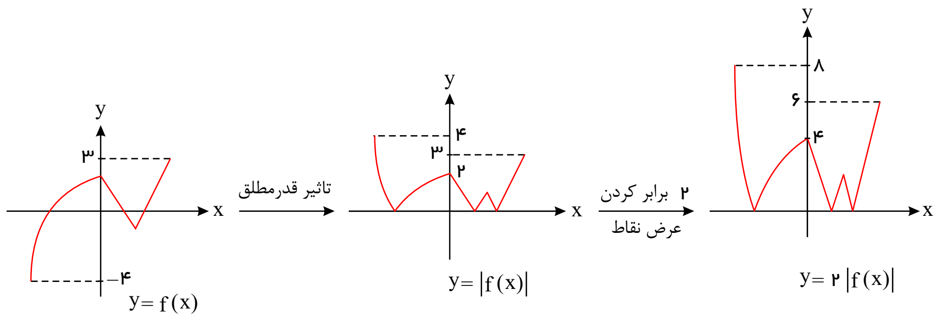
می‌دانیم اگر $a<x<b$ باشد آنگاه $\left|x-\frac{b+a}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$ است پس:

$$\left|x-\frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{2}}{2}\right|<\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{4}}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{\frac{15}{4}}{2}\right|<\frac{\frac{15}{4}}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{15}{8}\right|<\frac{5}{8}$$

پس $a=\frac{15}{8}$ و $b=\frac{5}{8}$ است.

بنابراین : $a^2+b^2=(\frac{15}{8})^2+(\frac{5}{8})^2=\frac{225}{64}+\frac{25}{64}=\frac{250}{64}=\frac{125}{32}$

۱۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴) اگر نمودار تابع $g(x)=|-2f(x)|$ را از روی نمودار f رسم کنیم، محدودهٔ تغییرات تابع g (که همان برد آن است) مشخص خواهد شد. فقط کافی است توجه کنیم که با توجه به ویژگی $|u|=|-u|$، به جای رسم نمودار $g(x)=|-2f(x)|$ می‌توانیم نمودار $g(x)=|2f(x)|$ و یا حتی $g(x)=2|f(x)|$ را رسم کنیم. داریم:



همان‌طور که می‌بینید محدودهٔ تغییرات تابع g بازهٔ بستهٔ $[0,8]$ است.

۱۲) ۱ ۲ ۳ **۴** از $|\beta|=\beta$ می‌فهمیم که β عددی نامنفی است. از $|\alpha|\neq\alpha$ می‌فهمیم که α منفی است. و $|\alpha|>|\beta|$ به ما می‌گوید که مقدار α بیشتر است. (مثلاً $\alpha=-7$ و $\beta=2$). پس $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ نیز منفی هستند.

از طرفی می‌دانیم: $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

$$|\alpha+\beta|+\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\underbrace{|\alpha+\beta|}_{\text{منفی}}+\underbrace{|\alpha-\beta|}_{\text{منفی}}=-(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=-2\alpha$$

۱۳) **۱** ۲ ۳ ۴ اگر به نمودار ۲ تابع توجه کنیم معلوم می‌شود که مجموع جواب نامعادله در xهای مثبت رخ می‌دهد پس می‌دانیم $x>0$ است و خواهیم داشت:

$$|2x-3|<x\Rightarrow -x<2x-3<x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-3<x\Rightarrow x<3\\ -x<2x-3\Rightarrow 3<3x\Rightarrow 1<x\end{cases}\Rightarrow 1<x<3\Rightarrow -1<x-2<1\Rightarrow |x-2|<1$$

۱۴) **۱** ۲ ۳ ۴ با توجه به شرایطی که برای a و b داده شده است، علامت درون هریک از قدرمطلق‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\underbrace{|a-b|}_{+}+\underbrace{|a+1|}_{+}-\underbrace{|1-b|}_{+}=a-b+a+1-(1-b)=2a$$

۱۵) ۱ **۲** ۳ ۴

گزینه (۱): قضیهٔ نامساوی مثلثی است.

$$|a+b|\le|a|+|b|$$

گزینه (۳):

$$|a|-|b|\le|a-b|\xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}}(|a|-|b|)^2\le(|a-b|)^2\Leftrightarrow|a|^2+|b|^2-2|a||b|\le a^2+b^2-2ab$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2|ab|\le a^2+b^2-2ab\Leftrightarrow -2|ab|\le-2ab\Leftrightarrow|ab|\ge ab$ همواره برقرار است.

گزینه (۴): در قضیهٔ نامساوی مثلثی به‌جای b ، $(-b)$ قرار می‌دهیم:

$$|a+(-b)|\le|a|+|-b|\Rightarrow|a-b|\le|a|+|b|$$

گزینه (۲): اگر $a=2$ ، $b=3$ در نظر بگیریم، داریم:

$$|a|-|b|=2-3=-1\not\ge|a-b|=|2-3|=1$$

۱۶) ۱ ۲ ۳ **۴** برای آنکه ظاهر تساوی راحت‌تر شود، دو طرف را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt{8}x+\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+6x+18}\xrightarrow{\times\sqrt{2}}4x+2=\sqrt{x^2+12x+36}\Rightarrow 4x+2=\sqrt{(x+6)^2}$$

می‌دانیم که $\sqrt{x^2}=|x|$ و خواهیم داشت:

$$4x+2=|x+6|\begin{cases}\xrightarrow{x\ge-6}4x+2=x+6\Rightarrow 3x=4\to x=\frac{4}{3}\\ \xrightarrow[x<-6]{}4x+2=-x-6\Rightarrow 5x=-8\to x=\frac{-8}{5}\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک جواب $x=\frac{4}{3}$ می‌باشد.

۱۷) **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا دامنهٔ تابع یعنی $|x-1|<2$ را باز می‌کنیم، سپس داریم:

$$|x-1|<2\Rightarrow(x-1)^2<4\Rightarrow x^2-2x+1<4\Rightarrow x^2-2x-3<0$$

۱۸) ۱ ۲ ۳ **۴** نکته: فاصله دو نقطه a و b از هم به‌صورت $|a-b|$ است.

فاصلهٔ x از ۳ به‌صورت $|x-3|$ و فاصله x از -2 به‌صورت $|x+2|$ خواهد بود. نسبت این دو فاصله کمتر از ۲ است که نامعادلهٔ زیر را به همراه دارد:

$$\frac{|x+3|}{|x-2|}>2\to|x+3|>|2x-4|\to|x+3|^2>|2x-4|^2$$

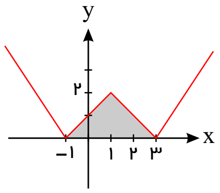
$$\to x^2+6x+9>4x^2-16x+16\to 3x^2-22x+7<0$$

$$\Delta=22^2-4(3)(7)=484-84=400\to x_{1,2}=\frac{22\pm20}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{22}{3}\\ x_2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

با توجه به بازهٔ به‌دست‌آمده برای x، حداکثر مقدار b برابر با $\frac{۲۲}{۳}$ خواهد بود.

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} < x < \frac{۲۲}{۳}$$

۱۹ ④ ③ ② ① ابتدا بایست $f(x)$ را رسم کنیم و خواهیم داشت:

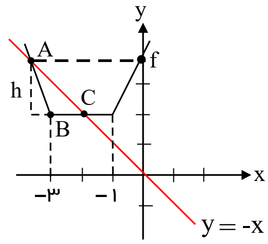


برای به دست آوردن محل تقاطع $f(x)$، محور xها عبارت را برابر صفر می‌گذاریم:

$$||x-۱|-۲| = ۰ \to |x-۱| = ۲ \to \begin{cases} x-۱=۲ \to x=۳ \\ x-۱=-۲ \to x=-۱ \end{cases}$$

بنابراین مساحت محصور برابر است با: $S = \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$

۲۰ ④ ③ ② ① ابتدا تابع گلدانی و نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} x < -۳ \Rightarrow -x = -۲x - ۴ \Rightarrow x = -۴ \text{ ق ق} \to A \left| {}^{-۴} \right. \\ -۳ \leq x \leq -۱ \Rightarrow -x = ۲ \Rightarrow x = -۲ \text{ ق ق} \to C \left| {}^{-۱} \right. \\ x > -۱ \Rightarrow -x = ۲x + ۴ \Rightarrow x = \frac{-۴}{۳} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

با توجه به شکل، برای مساحت بین دو نمودار داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۲ \times ۱}{۲} = ۱$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۳
۲	۲
۳	۲
۴	۱
۵	۲
۶	۴
۷	۱
۸	۲
۹	۲
۱۰	۱
۱۱	۲
۱۲	۴
۱۳	۱
۱۴	۱
۱۵	۲
۱۶	۴
۱۷	۱
۱۸	۴
۱۹	۱
۲۰	۳