



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



سید بهروز پرتوی

نام آزمون: اعداد گویا و گنگ

تاریخ آزمون:

۱ بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- ۱ ۳۲ (۱) ۲ ۳۳ (۲) ۳ ۳۵ (۳) ۴ ۳۶ (۴)

۲ اگر $\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16} = 3$ ، حاصل $\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16}$ کدام است؟

- ۱ ۱ (۱) ۲ ۸ (۲) ۳ ۳ (۳) ۴ ۲۴ (۴)

۳ به‌ازای کدام مقدار m ، یک ریشه معادله $\frac{m}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+4}{x^2-x-2}$ از قرینه ریشه دیگر یک واحد بیش‌تر است؟

- ۱ ۲ (۱) ۲ ۳ (۲) ۳ -۲ (۳) ۴ -۳ (۴)

۴ مجموع تمام اعدادی که «از جذر خود $\frac{1}{8}$ واحد کم‌تر هستند»، کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ (۱) ۲ $\frac{2}{3}$ (۲) ۳ $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ ۱ (۴)

۵ نگین، پازلی را به تنهایی ۶ ساعت زودتر از امیر، کامل می‌کرد. پس از پنج ماه تمرین، سرعت نگین و امیر در تکمیل پازل به ترتیب ۳ و ۲ برابر شده است به طوری که هر دو باهم، همان پازل را در ۴ ساعت کامل می‌کنند. در حال حاضر اختلاف مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا هریک به تنهایی پازل را کامل کنند، چند ساعت است؟

- ۱ ۲ (۱) ۲ ۴ (۲) ۳ ۶ (۳) ۴ ۸ (۴)

۶ معادله $\sqrt{3-3y} - \sqrt{3y+2} = 3$ چند جواب دارد؟

- ۱ دو (۱) ۲ یک (۲) ۳ بی‌شمار (۳) ۴ صفر (۴)

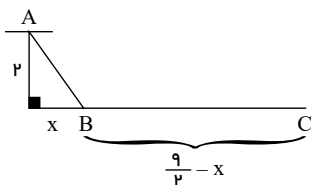
۷ معادله $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$ چند جواب دارد؟

- ۱ ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ صفر (۳) ۴ ۴ (۴)

۸ اگر a ریشه معادله $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+5}$ باشد، حاصل $\frac{4a+1}{a}$ کدام است؟

- ۱ ۱٫۵ (۱) ۲ ۲٫۵ (۲) ۳ ۳٫۵ (۳) ۴ ۴٫۵ (۴)

۹ کلبه‌ای مطابق شکل زیر در نقطه A واقع است. اگر سرعت حرکت در مسیر AB ، $2 \frac{km}{h}$ و سرعت حرکت در مسیر BC ، $4 \frac{km}{h}$ باشد، به‌ازای چند مقدار برای x می‌توان در مسیر ABC دو ساعته از نقطه A به نقطه C رسید؟ (فاصله‌ها برحسب کیلومتر هستند.)



۱ ۲ مقدار (۱)

۲ فقط یک مقدار کوچک‌تر از ۲ (۲)

۳ فقط یک مقدار بزرگ‌تر از ۲ (۳)

۴ هیچ مقدار (۴)

۱۰ جواب معادله $x^2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2$ به کدام صورت است؟

- ۱ یک جواب منفی (۱) ۲ دو جواب مختلف‌العلامت (۲) ۳ دو جواب مثبت (۳) ۴ یک جواب مثبت (۴)



۱۱) اگر $x = k$ جوابی از معادله $\frac{x-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-x}$ باشد، قدرمطلق تفاضل مقدارهای به دست آمده برای k چه قدر است؟

- ۴ ① ۳ ② ۵ ③ ۶ ④

۱۲) از معادله $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 1$ مقدار x کدام است؟

- ۲٫۷۵ ① ۳٫۲۵ ② ۳٫۵ ③ ۳٫۷۵ ④

۱۳) معادله $x(x^2 - 9)\sqrt{x-2} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- دو ریشه ① چهار ریشه ② سه ریشه ③ یک ریشه ④

۱۴) از حل معادله $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$ مقدار $\sqrt{7-x}$ کدام است؟

- ۴ ① ۳ ② ۱ ③ جواب ندارد. ④

۱۵) مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x(1 - \frac{x-1}{x+1})$ کدام است؟

- ۰ ① ۱ ② $-\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④

۱۶) تعداد جواب‌های معادله $\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = 4-x$ کدام است؟

- ۳ ① ۲ ② ۱ ③ صفر ④

۱۷) معادله $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۰ ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④

۱۸) معادله $\sqrt{x-x^2} - \sqrt{x^2-1} = 3$ چند جواب حقیقی دارد؟

- صفر ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④

۱۹) جواب‌های معادله $\sqrt{\frac{3+x}{1-2x}} + \sqrt{\frac{1-2x}{3+x}} = 2$ چگونه است؟

- فقط یک جواب منفی ① فقط یک جواب مثبت ② یک جواب مثبت و یک جواب منفی ③ معادله جواب ندارد ④

۲۰) اگر $\sqrt{y^2-9} + \sqrt{y^2+7x+3} = 0$ باشد، x کدام است؟

- ۱۲ ① -۱۲ ② ۶ ③ -۶ ④

پاسخنامه تشریحی

۱ اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در $k + 9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=36 \\ k=-5 \end{cases} \text{ غ ق}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16} = A$$

طرفین معادله را در $(\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16})$ ضرب می‌کنیم.

$$\rightarrow (\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16})(\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16}) = (\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16})A$$

$$\rightarrow (4x+8) - (4x-16) = 3A \Rightarrow 24 = 3A \rightarrow A = 8$$

۳ در طرف چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{m}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+4}{x^2-x-2} \Rightarrow \frac{mx+m+x^2-2x}{x^2-x-2} = \frac{2x+4}{x^2-x-2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -1, 2} mx+m+x^2-2x = 2x+4 \Rightarrow x^2 + (m-4)x + (m-4) = 0 \quad (*)$$

اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، با توجه به این که یک ریشه معادله از قرینه ریشه دیگر یک واحد بیش‌تر است، داریم:

$$\alpha = -\beta + 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \quad (**)$$

با توجه به معادله (*) جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{m-4}{1} \xrightarrow{(**)} -\frac{m-4}{1} = 1 \Rightarrow m = 3$$

۴ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم.

$$x = \sqrt{x} - \frac{1}{\lambda} \rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{\lambda} = 0 \rightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - t + \frac{1}{\lambda} = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 1 - \frac{4}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{6 + 4\sqrt{2}}{16} = x_1 \\ t_2 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{6 - 4\sqrt{2}}{16} = x_2 \end{cases}$$

$$\text{پس: } x_1 + x_2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{16} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

۵ کل کار تکمیل پازل را ۱ واحد فرض می‌کنیم. حال اگر مدت‌زمانی را که در ابتدا طول می‌کشید تا نگین، پازل را به‌تنهایی تکمیل کند، t در نظر بگیریم، در این

صورت میزان تکمیل پازل در یک ساعت توسط نگین و امیر به‌ترتیب، برابر $\frac{1}{t}$ و $\frac{1}{t+6}$ بوده است. در نتیجه بنابر فرضیات مسئله در حال حاضر، خواهیم داشت:

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} = \frac{1}{4} \xrightarrow{t \neq 0, -6} 4t(t+6) \left(\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 - 14t - 72 = 0 \Rightarrow (t-18)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=18 \\ t=-4 \end{cases} \text{ (غ ق)}$$

$$\left. \begin{aligned} t'_{\text{نگین}} &= \frac{t}{3} = 6 \\ t'_{\text{امیر}} &= \frac{t+6}{2} = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |t'_{\text{نگین}} - t'_{\text{امیر}}| = 6$$

$$\sqrt{3-3y} = 3 + \sqrt{3y+2} \xrightarrow{\text{توان } 2} 3-3y = 9 + 3y + 2 + 6\sqrt{3y+2}$$

$$\rightarrow -6y - 8 = 6\sqrt{3y+2} \rightarrow -2(3y+4) = 6\sqrt{3y+2}$$

$$\rightarrow -(3y+4) = 3\sqrt{3y+2} \xrightarrow{\text{توان } 2} 9y^2 + 16 + 24y = 27y + 18$$

$$\rightarrow 9y^2 - 3y - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 72 = 81$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3+9}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{3-9}{18} = \frac{-6}{18} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

هیچ کدام از دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق نمی کنند بنابراین معادله فاقد جواب است.

۷ فرض می کنیم $x^2 - 2x + 2 = t$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2} \Rightarrow \frac{t+1+2t}{t(t+1)} = \frac{6}{t+2} \Rightarrow \frac{3t+1}{t^2+t} = \frac{6}{t+2} \Rightarrow 3t^2 + 6t + t + 2 = 6t^2 + 6t \Rightarrow 3t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس معادله دارای فقط یک ریشه $x = 1$ است.

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{x+5-x-3}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \frac{2}{x^2+8x+15} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 - 1 \Rightarrow 8x = -16 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow a = -2$$

در نتیجه:

$$\frac{4a+1}{a} = \frac{4(-2)+1}{-2} = \frac{-7}{-2} = 3,5$$

۹ زمان طی شده یک مسیر از تقسیم طولش بر سرعت طی کردن آن پیدا می شود.

$$\text{زمان کل: } \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{\frac{9}{2}-x}{4} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{4+x^2} + \frac{9}{2} - x = 8 \Rightarrow 2\sqrt{4+x^2} = \frac{7}{2} + x$$

طرفین به توان ۲:

$$4(4+x^2) = \frac{49}{4} + 7x + x^2 \Rightarrow 3x^2 - 7x + \frac{15}{4} = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 45 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{7-2}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

که هر دو قابل قبولند.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow \text{ق ق} \\ x = -1 \rightarrow \text{غ ق (در معادله صدق نمی کند)} \end{cases}$$

۱۱ $x = k$ جواب معادله است پس باید در معادله صدق کند:

$$\frac{k-1}{k+2} + \frac{2}{k} = \frac{4k-4}{k^2-k} \rightarrow \frac{k^2-k+2k+4}{k(k+2)} = \frac{4(k-1)}{k(k-1)} \rightarrow \frac{k^2+k+4}{k(k+2)} = \frac{4}{k} \rightarrow \frac{k^2+k+4}{k+2} = 4 \rightarrow k^2+k+4 = 4k+8 \rightarrow k^2-3k-4 = 0$$

$$\rightarrow (k-4)(k+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 4 \end{cases} \rightarrow |k_2 - k_1| = |4 - (-1)| = 5$$

$$\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان } 2} x+3 = 1+x-1+2\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{x-1}$$



$$\Rightarrow \frac{9}{4} = x - 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{9}{4} = 3,25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$x(x-3)(x+3)\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 0, 3, -3, 2$$

با توجه به شرط $x \geq 2$, $x = 2$ و $x = 3$ جواب است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3) + x(2x+5)}{x(x+3)} = 5 \Rightarrow \frac{3x^2 + 9x - 2x - 6 + 2x^2 + 5x}{x^2 + 3x} = 5 \Rightarrow 5x^2 + 12x - 6 = 5x^2 + 15x$$

$$\rightarrow -3x = 6 \rightarrow x = -2$$

$$\text{پس: } \sqrt{7-x} = \sqrt{7-(-2)} = \sqrt{9} = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) \rightarrow \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = 3x \left(\frac{x+1-x+1}{x+1}\right)$$

$$\rightarrow \frac{x^2+1+2x-(x^2+1-2x)}{(x+1)(x-1)} = \frac{6x}{x+1} \rightarrow \frac{4x}{x-1} = 6x$$

$$\rightarrow 6x^2 - 6x = 4x \rightarrow 6x^2 - 10x = 0 \rightarrow 2x(3x-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ قی} \\ x = \frac{5}{3} \text{ قی} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) \Rightarrow (2-\sqrt{x})\left[\frac{1}{2+\sqrt{x}} - (2+\sqrt{x})\right] = 0$$

از معادله بالا فقط حالت $2-\sqrt{x} = 0$ امکان پذیر است:

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{(x-1)(x+1)} \xrightarrow{\times(x-1)(x+1)} (2x+3)(x+1) - (2x-3)(x-1) = 10$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^2} + 5x + 3 - \cancel{2x^2} + 5x - 3 = 10 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$$
 غیر قابل قبول

معادله ریشه ندارد.

با در نظر گرفتن شرایط معادله داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{در معادله}} \sqrt{1-1} - \sqrt{1-1} = 3 \Rightarrow 0 = 3 \text{ غلط}$$

معادله جواب ندارد.

با تغییر متغیر $t = \sqrt{\frac{3+x}{1-2x}}$ خواهیم داشت: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3+x}{1-2x} = 1 \Rightarrow 3+x = 1-2x \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر است و این زمانی امکان پذیر است که هر دو نامنفی صفر شوند و ریشه مشترک، جواب معادله است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$\sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y^2-9 = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\sqrt{y^2+7x+3} = 0 \xrightarrow{y=\pm 3} \sqrt{11+7x+3} = 0 \Rightarrow 7x+14 = 0 \Rightarrow x = \frac{-14}{7} = -2$$

پاسخنامه کلیدی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |