نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم آزمون جامع تستی

تاریخ آزمون:

۱) اگر $AB - BA = I$ باشد، حاصل $AB^{۲} - B^{۲}A$ کدام است؟

۱) $۲A$ ۲) $۲B$ ۳) $A^{۲}$ ۴) $B^{۲}$

۲) در بیضی با دو کانون F و F' دایره به قطر $FF' = ۲c$، دایره کانونی بیضی نام دارد. در کدام حالت، دایره کانونی درون بیضی قرار می‌گیرد؟

۱) $۰ < e < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $۰ < e < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $۰ < e < \frac{۴}{۵}$ ۴) $۰ < e < \frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۳) اگر داشته باشیم $AB^{-۱} = ۳I$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix}$، ماتریس $B(CA)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۹} \\ -\frac{۱}{۹} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۲}{۹} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۲}{۹} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۹} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix}$

۴) خط $y = ax + ۲$ دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۴y + ۱ = ۰$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. کمترین اندازهٔ AB کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه‌های سطر دوم در ماتریس $A^{۱۰۰۰}$ کدام است؟

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۲۰۰۱ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۲۰۰۰

۶) به‌ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی $۲y^{۲} - ۱۲y + ax + ۸ = ۰$، به معادلهٔ $x = \frac{۲۱}{۸}$ است؟

۱) ۱۲ و ۳ ۲) ۱۶ و ۳ ۳) ۱۲ و ۵ ۴) ۱۶ و ۵

۷) اگر $\vec{a} = (۱, -۲, ۳)$ و $\vec{b} = (۲, ۰, ۱)$، مساحت متوازی‌الاضلاع تولیدشده توسط دو بردار $\vec{a} + ۳\vec{b}$ و $۲\vec{a} + ۵\vec{b}$، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

۸) اگر یکی از جواب های معادله ی $\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = O$ ، برابر $x = ۰$ باشد، آنگاه جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) $-\frac{۹}{۲}$

۹) اگر $۳\vec{a} + ۲\vec{b} + \vec{c} = \vec{O}$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۴$ باشند، آنگاه $|\vec{b} \times \vec{c}|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۰) $A(۱, ۲, -۱)$ و $B(۰, ۱, ۱)$ دو رأس متوالی یک متوازی‌الاضلاع هستند. اگر محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع نقطهٔ $O(۲, ۱, ۱)$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۸\sqrt{۵}$

۱۱ نقاط $(-۱, ۰)$، $(۳, ۰)$ و $(۱, -۲)$ روی یک سهمی واقع هستند. از کانون سهمی، خطی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط M و N قطع کند. اندازهٔ MN چقدر است؟

(۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲ حاصل عبارت $(i - j + k) \cdot ((۳j + k) \times (k - i))$ برابر کدام است؟ (i، j و k بردارهای یکه‌ی محورهای مختصات‌اند.)

(۱) ۲- (۲) ۱- (۳) ۵ (۴) ۷

۱۳ اگر برای بردارهای واحد $\vec{a}$، $\vec{b}, \vec{c}$ داشته باشیم $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ۰$، حاصل $|۲\vec{a} - ۴\vec{b} + ۲\vec{c}|$ چقدر است؟

(۱) ۶ (۲) $۲\sqrt{۳}$ (۳) $۳\sqrt{۲}$ (۴) ۲

۱۴ تصویر قائم بردار $(۶, -۳, ۰)$ روی امتداد بردار $(۲, -۱, -۲)$ کدام بردار است؟

(۱) $(۲, -۱, -۲)$ (۲) $(-۲, ۱, ۲)$ (۳) $(۴, -۲, -۴)$ (۴) $(۲, ۳, -۱)$

۱۵ اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲ & b \\ ۴ & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۹ & ۵ \\ -۵ & ۹ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، حاصل $a - b$ کدام است؟

(۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۶ بردار $v = (-۱, -۲, ۲)$ مفروض است. مجموع مؤلفه‌های مختصات بردار u به طول ۱۵ که موازی و هم‌جهت با v باشد، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۳ (۳) -۵ (۴) -۶

۱۷ کدام نقطه از سهمی $y^۲ = ۴x$ از کانون و رأس آن به یک فاصله است؟

(۱) $(۱, ۲)$ (۲) $(۲, ۲\sqrt{۲})$ (۳) $(\frac{۱}{۲}, \sqrt{۲})$ (۴) $(\frac{۱}{۲}, ۱)$

۱۸ اگر A ماتریس مربعی مرتبه ۳ و وارون‌پذیر بوده طوری که $|BA - I| = ۲$، آنگاه حاصل $|AB - I|$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) -۸

۱۹ دو شعاع نور موازی با محور xها به بدنهٔ سهمی به معادلهٔ $y^۲ + ۸y + ۱۲x - ۸ = ۰$ می‌تابند. بازتاب این دو شعاع در کدام نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

(۱) $(-۱, -۴)$ (۲) $(۵, -۴)$ (۳) $(۲, -۱)$ (۴) $(۲, -۷)$

۲۰ به‌ازای چند مقدار طبیعی k، معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۳y + k = ۰$ معادلهٔ یک دایره است؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

پاسخنامه تشریحی

۱ ۴ ۳ **۲** ۱ فرض سؤال را از سمت راست و از سمت چپ در ماتریس B ضرب می‌کنیم:

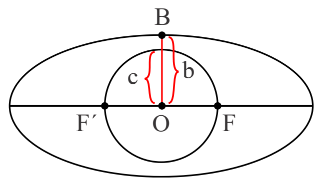
$$AB - BA = I \xrightarrow[\text{در } B \text{ ضرب شود}]{\text{طرفین از سمت راست}} AB^2 - BAB = B$$

$$\xrightarrow{+} AB^2 - B^2A = 2B$$

$$AB - BA = I \xrightarrow[\text{در } B \text{ ضرب شود}]{\text{طرفین از سمت چپ}} BAB - B^2A = B$$

۲ ۴ ۳ ۲ **۱** مطابق شکل، باید $c < b$ باشد تا دایرهٔ کانونی درون بیضی قرار گیرد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \\ c < b \rightarrow c^2 < b^2 \end{array}\right\}$$



$$\rightarrow c^2 < a^2 - c^2 \rightarrow 2c^2 < a^2 \rightarrow \frac{c^2}{a^2} < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{c}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow e < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳ ۴ **۳** ۲ ۱ طبق فرض سؤال داریم:

$$AB^{-1} = 3I \rightarrow (AB^{-1})^{-1} = (3I)^{-1} \rightarrow (B^{-1})^{-1}A^{-1} = BA^{-1} = \frac{1}{3}I$$

ماتریس موردنظر برابر می‌شود با:

$$B(CA)^{-1} = \underbrace{BA^{-1}}_{\frac{1}{3}I}C^{-1} = \frac{1}{3}C^{-1} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B(CA)^{-1} = \frac{1}{3}C^{-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

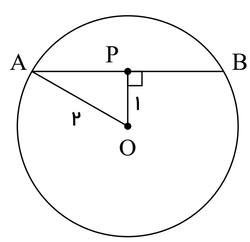
۴ **۴** ۳ ۲ ۱ خط $y = ax + 2$ همواره از نقطهٔ ثابت $P(0, 2)$ می‌گذرد. مرکز و شعاع دایره را از روی معادلهٔ دایره می‌یابیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} O(1, 2) \\ R = 2 \end{array}\right.$$

مطابق شکل، کوتاه‌ترین وتر گذرا از $P(0, 2)$، بر OP عمود است و توسط آن نصف می‌شود:

$$OP = 1$$

$$AP^2 = OA^2 - OP^2 \rightarrow AP^2 = 4 - 1 \rightarrow AP = \sqrt{3} \rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$



۵ ۴ ۳ ۲ **۱** ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به نظر می‌رسد اگر ادامه دهیم، آنگاه:

$$A^n = \begin{bmatrix}1 & n & x\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A^{1000} = \begin{bmatrix}1 & 1000 & x\\ 0 & 1 & 1000\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های سطر دوم } A^{1000} = 1001$$

۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)** سهمی $2y^2 - 12y + ax + 8 = 0$ یک سهمی افقی است.

ابتدا رأس و پارامتر آن را پیدا می‌کنیم. برای آنکه پارامتر سهمی با متغیر a در معادلهٔ داده‌شده اشتباه گرفته نشود a را با m نمایش می‌دهیم یعنی معادلهٔ سهمی را به شکل $2y^2 - 12y + mx + 8 = 0$ درنظر می‌گیریم.

$$2(y^2 - 6y) = -mx - 8 \Rightarrow 2\left[(y-3)^2 - 9\right] = -mx - 8 \Rightarrow 2(y-3)^2 = -mx + 10$$

$$\Rightarrow 2(y-3)^2 = -m(x - \frac{10}{m}) \Rightarrow (y-3)^2 = -\frac{m}{2}(x - \frac{10}{m})$$

این سهمی، افقی و رأس آن نقطهٔ $(\frac{10}{m}, 3)$ است و داریم $a = \left|\frac{-m}{8}\right|$.

معادلهٔ خط هادی سهمی افقی به شکل $(a<0)x = -a + \alpha$ یا $(a<0)x = a + \alpha$ است که در هر دو حالت به‌صورت زیر می‌شود:

$$\text{خط هادی}: x = \frac{m}{8} + \frac{10}{m} \xrightarrow{x = \frac{21}{8}} \frac{21}{8} = \frac{m}{8} + \frac{10}{m}$$

$$\Rightarrow m^2 - 21m + 80 = 0 \Rightarrow (m-16)(m-5) = 0 \Rightarrow m = 16, 5$$

۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴) می‌دانیم مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده روی دو بردار، برابر است با اندازهٔ ضرب خارجی آن دو بردار، پس:

$$S = |(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b})| = |5\vec{a} \times \vec{b} + 6\vec{b} \times \vec{a}| = |-\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix} = (2, -5, -4) \Rightarrow S = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

با ضرب کردن ماتریس ها در یکدیگر داریم:

$$[x \;\; 2 \;\; 1]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = O \;\Rightarrow [2x+7 \quad x \quad 2+a]\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \left[2x^2 + 7x + 2x + (2+a)\right] = O$$

بنابراین داریم:

$$2x^2 + 9x + (2+a) = 0 \xrightarrow{x=0} 2 + a = 0$$

و معادله به صورت زیر در می آید:

$$2x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(2x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\\ x = -\frac{9}{2}\end{cases}$$

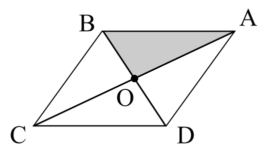
۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)** طرفین رابطهٔ $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{O}$ را در $\vec{b}$ (از سمت چپ) ضرب خارجی می‌کنیم:

$$3\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{O} \Rightarrow 3\vec{b} \times \vec{a} + \vec{O} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{O}$$

$$\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = -3\vec{b} \times \vec{a} = 3\vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow |\vec{b} \times \vec{c}| = 3|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$$

۱۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

مطابق شکل، مساحت مثلث OAB را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}\overrightarrow{OA} = A - O = (-1, 1, -2)\\ \overrightarrow{OB} = B - O = (-2, 0, 0)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (0, 4, 2) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+4} = \sqrt{5}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 4S_{OAB} = 4\sqrt{5}$$

۱۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)** دو نقطهٔ $(0, -1)$ و $(0, 3)$، دارای طول‌های برابر هستند، پس سهمی افقی است. محور تقارن سهمی، خط $y = \frac{-1+3}{2} = 1$ است. بنابراین نقطهٔ دیگر داده شده یعنی $(-2, 1)$، رأس سهمی می‌باشد. داریم:

$$(y-۱)^۲ = ۴p(x+۲) \xrightarrow{(۰,۳)} ۴ = ۴p \times ۲ \Rightarrow ۴p = ۲$$

طول وتر کانونی سهمی (پاره‌خط MN) برابر $۴p$ یعنی ۲ است.

۱۲) ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم که $i \times j = k$, $j \times k = i$ و $k \times i = j$، داریم:

$$(۳j+k)\times(k-i) = ۳j\times k - ۳j\times i + \underbrace{k\times k}_{۰} - k\times i = ۳i - j + ۳k \quad (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} (i-j+k)\cdot((۳j+k)\times(k-i)) = (i-j+k)\cdot(۳i-j+۳k) = ۳+۱+۳ = ۷$$

۱۳) **۱** ۲ ۳ ۴

از فرض $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰$ نتیجه می‌گیریم $\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}$. داریم:

$$\left|۲\vec{a}-۴\vec{b}+۲\vec{c}\right| = \left|۲\left(\vec{a}+\vec{c}\right)-۴\vec{b}\right| = \left|-۲\vec{b}-۴\vec{b}\right| = \left|-۶\vec{b}\right| = ۶\times ۱ = ۶$$

۱۴) ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ از دستور $\vec{a'} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ حاصل می‌شود. پس:

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{-۹}{۹}(۲,-۱,-۲) = (-۲,۱,۲)$$

۱۵) ۱ ۲ **۳** ۴ روش اول:

هرگاه دو ماتریس مربع هم‌مرتبه به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ یا هر دو به فرم $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ باشند، نسبت به عمل ضرب دارای خاصیت جابه‌جایی‌اند.

از آنجا که ماتریس B به فرم $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ بوده، لذا ماتریس A هم به همین فرم است یعنی داریم:

$$\begin{cases} a=۲ \\ b=-۴ \end{cases} \Rightarrow a-b=۶$$

روش دوم:

ابتدا تساوی $AB=BA$ را تشکیل داده و از حل دستگاه، مقادیر a و b به‌دست می‌آید.

۱۶) ۱ ۲ **۳** ۴ نکته: اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار منطبق بر هم باشند آنگاه $\vec{u}=k\vec{v}$ در حالتی که $k>۰$ دو بردار هم‌جهت و در حالتی از $k<۰$ دو بردار مختلف‌الجهت هستند.

بردارها هم امتداد و هم‌جهت هستند. پس هر کدام مضربی مثبت از دیگری هستند.

$$u = kv = (-k,-۲k,۲k)\ , \quad k>۰$$

$$|u| = |kv| = k\,|v| \Rightarrow ۱۵ = k\times ۳ \Rightarrow k=۵$$

$$\Rightarrow u = (-۵,-۱۰,۱۰) \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه‌ها} = -۵-۱۰+۱۰ = -۵$$

۱۷) ۱ ۲ **۳** ۴

مکان هندسی نقاطی که از کانون F و راس S به یک فاصله‌اند. عمودمنصف پاره‌خط FS است. سهمی $y^۲=۴x$ افقی و دهانهٔ آن رو به راست بوده و رأس آن $(۰,۰)$ و $a=۱$ است. درنتیجه کانون آن $F(۱,۰)$ است؛ بنابراین معادله عمودمنصف SF برابر $x=\frac{۱}{۲}$ است. حال این خط را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y^۲=۴x \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow y^۲=۲ \Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین نقاط $A(\frac{۱}{۲},\sqrt{۲})$ و $B(\frac{۱}{۲},-\sqrt{۲})$ روی این سهمی از کانون و راس به یک فاصله‌اند.

۱۸) ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به فرض سؤال و رابطهٔ $I=A^{-۱}A$ داریم:

$$|BA-A^{-۱}A| = |(B-A^{-۱})A| = |B-A^{-۱}||A| = |A||B-A^{-۱}| = |A(B-A^{-۱})| = |AB-I| = ۲$$

۱۹) **۱** ۲ ۳ ۴ محور این سهمی موازی محور xها است. بنابراین هر شعاع نوری که موازی با محور xها و درنتیجه موازی با محور سهمی به بدنهٔ این سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. ابتدا معادلهٔ سهمی را به حالت متعارف تبدیل می‌کنیم:

$$y^۲+۸y+۱۲x-۸=۰ \Rightarrow y^۲+۸y+۱۶=-۱۲x+۲۴ \Rightarrow (y+۴)^۲=-۱۲(x-۲)$$

نقطهٔ $A(۲,-۴)$ رأس سهمی است و دهانهٔ سهمی رو به چپ باز می‌شود، بنابراین داریم:

$$۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$$

$$\text{کانون سهمی}: F(-a+h,k) = (-۳+۲,-۴) = (-۱,-۴)$$

۲۰) ۱ ۲ ۳ **۴** نکته: رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ با شرط $a^۲+b^۲-۴c>۰$ معادله یک دایره است. داریم:

$$x^۲+y^۲+۲x+۳y+k=۰$$

$$a^۲+b^۲-۴c>۰ \Rightarrow ۲^۲+۳^۲-۴k>۰ \Rightarrow k<\frac{۱۳}{۴}=۳/۲۵ \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} k=۱,۲,۳$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۲
۲	۱
۳	۳
۴	۴
۵	۱
۶	۴
۷	۳
۸	۴
۹	۴
۱۰	۳
۱۱	۴
۱۲	۴
۱۳	۱
۱۴	۲
۱۵	۳
۱۶	۳
۱۷	۳
۱۸	۲
۱۹	۱
۲۰	۴