نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم فصل اول (تستی)

تاریخ آزمون:

۱ ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ و $C=[c_{ij}]_{۲\times۲}$ مفروض‌اند، کدام عبارت قابل تعریف <u>نیست</u>؟

① $AB+C$ ② BCA ③ ABC ④ $BC+A$

۲ معادلهٔ $\begin{vmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ -۲ & ۶ & -۲ \\ -۲x & ۶x & -۴x \end{vmatrix}=۰$ چند ریشه دارد؟

① فاقد ریشه ② یک ریشه ③ دو ریشه ④ بی‌شمار ریشه

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -\cos^۲\alpha \\ ۱+\tan^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}$ حاصل $\left|A^{۹۹}+A^{۱۰۰}\right|$ کدام است؟

① ۱ ② صفر ③ $\sin^۲\alpha$ ④ ۲

۴ اگر $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ به‌ازای چه مقادیری از α، رابطهٔ $A=A^{-۱}$ برقرار است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

① $k\pi$ ② $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ③ $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ④ $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۵ اگر $[۱ \quad x]\begin{bmatrix} x & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲x \\ ۱ \end{bmatrix}=۷$ مقدار مثبت x کدام است؟

① ۴ ② ۳ ③ ۱ ④ ۲

۶ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ x & y \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، آنگاه با فرض $B=\begin{bmatrix} ۲x & -y \\ -۶y & ۲x \end{bmatrix}$، حاصل $(۴x)B^{-۱}$ کدام است؟ $(x\neq۰)$

① $\begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۱۲ & -۴ \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ ۶ & -۲ \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۱۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۶ & ۲ \end{bmatrix}$

۷ اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و $AB=B$ و $BA=A$ باشد، آنگاه حاصل $(A+B)^۳$ کدام است؟

① $A+B$ ② $۲(A+B)$ ③ $۳(A+B)$ ④ $۴(A+B)$

۸ برای دو ماتریس مربعی A و B از مرتبهٔ ۳، روابط $BA=I$ و $|B|=\sqrt{۵}$ و $|A^۲-A+I|=۲$ برقرار است، حاصل $|B^۲-B+I|$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۵}$ ② ۲۰ ③ $\frac{۴}{۵}$ ④ ۱۰

۹ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس X که در رابطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ... $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=X\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ صدق می‌کند، کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ -۲

۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ و $A^n=۲^{۲n-۲}\times۳^{n-۱}A$ ، a کدام است؟

① ۳ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۲

۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$، کدام است؟

① $[۳۰\ \ ۶\ \ ۶۴]$ ② $[۳۰\ \ ۶\ \ ۷۸]$ ③ $[۳۴\ \ ۸\ \ ۸۶]$ ④ $[۳۰\ \ ۶\ \ ۸۶]$

۱۲ در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰&۳\\۱&۰\end{bmatrix}$ اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲n}+A^{۲n+۱}$ برابر ۱۴۵۸ باشد، n کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۱۳ اگر $A=[i+j]_{۱\times ۲}$ و $B=[i-j]_{۲\times ۲}$ و $c=[ij]_{۲\times ۱}$، حاصل ABC کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ -۲

۱۴ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&۳\\-۱&۱\end{bmatrix}$، آنگاه $A^{۲۰}$ با کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

① $\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}۱&-۳\\۱&-۲\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۲\end{bmatrix}$

۱۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۷\\۱&-۳\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{۲۵۱}$ کدام است؟

① A ② $A^{۲}$ ③ I ④ $\bar{O}$

۱۶ اگر ماتریس ناصفر $b=\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix}۵&-۲\\۴&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴b_۱\\۴b_۲\end{bmatrix}$، آنگاه مقدار a، کدام است؟

① -۴ ② صفر ③ ۴ ④ ۱۲

۱۷ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&-۱\\۴&۳\end{bmatrix}$ باشد، از رابطهٔ ماتریسی $AX=-A+۲I$، ماتریس X کدام است؟

① $\begin{bmatrix}۴&۱\\-۴&-۱\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۴&۱\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}-۴&۱\\۴&-۱\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}-۴&-۱\\۴&۱\end{bmatrix}$

۱۸ اگر C ماتریسی ۲×۲ و وارون‌پذیر باشد، حاصل $\left[C^{-۱}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\end{bmatrix}C\right]^{۲}$ کدام است؟

① $C^{-۱}\begin{bmatrix}-۱&-۲\\۴&-۱\end{bmatrix}C$ ② $C^{-۱}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۴&۱\end{bmatrix}C$ ③ $C^{-۱}\begin{bmatrix}-۱&-۲\\۴&-۱\end{bmatrix}C^{۲}$ ④ $(C^{-۱})^{۲}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۴&-۱\end{bmatrix}C$

۱۹ اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱+\tan^{۲}\alpha\\\cos^{۲}\alpha&۰\end{bmatrix}$ آنگاه $A^{۷}+A^{۸}$ کدام است؟

① $۲A$ ② I ③ $A+I$ ④ A

۲۰ اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}$ باشد آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۹۹}+A^{۱۰۰}$ کدام است؟

① ۸ ② ۷ ③ ۶ ④ ۵

پاسخنامه تشریحی

۱ (۱) (۲) (۳) (**۴**) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $\underbrace{[A]_{۲\times۳}\times[B]_{۳\times۲}}_{۲\times۲}+[C]_{۲\times۲}=[AB+C]_{۲\times۲}$

گزینهٔ ۲ : $\underbrace{[B]_{۳\times۲}\times[C]_{۲\times۲}}_{۳\times۲}\times[A]_{۲\times۳}=[BCA]_{۳\times۳}$

گزینهٔ ۳ : $\underbrace{[A]_{۲\times۳}\times[B]_{۳\times۲}}_{۲\times۲}\times[C]_{۲\times۲}=[ABC]_{۲\times۲}$

در گزینهٔ «۴»، BC یک ماتریس ۲ × ۳ و A یک ماتریس ۳ × ۲ است، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

۲ (۱) (۲) (۳) (**۴**) با کمی دقت متوجه می‌شویم سطر سوم، $(-۲x)$ برابر سطر اول است، بنابراین حاصل این دترمینان همواره صفر است و به x بستگی ندارد.

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ -۲ & ۶ & -۲ \\ -۲x & ۶x & -۴x \end{vmatrix}=(-۲x)\begin{vmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ -۲ & ۶ & -۲ \\ ۱ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}=۰$$

۳ (۱) (۲) (۳) (**۴**) طبق رابطهٔ $\cos^۲\alpha=\dfrac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}$ داریم: $A=\begin{bmatrix} ۰ & -\cos^۲\alpha \\ \frac{۱}{\cos^۲\alpha} & ۰ \end{bmatrix}$

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & -\cos^۲\alpha \\ \frac{۱}{\cos^۲\alpha} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -\cos^۲\alpha \\ \frac{۱}{\cos^۲\alpha} & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$A^۲=-I\rightarrow A^{۹۹}+A^{۱۰۰}=(A^۲)^{۴۹}\times A+(A^۲)^{۵۰}=-A+I=\begin{bmatrix} ۰ & \cos^۲\alpha \\ \frac{-۱}{\cos^۲\alpha} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & \cos^۲\alpha \\ \frac{-۱}{\cos^۲\alpha} & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow |I-A|=۱+\frac{\cos^۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=۲$$

۴ (**۱**) (۲) (۳) (۴) ماتریس $A^{-۱}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{\underbrace{\cos^۲x+\sin^۲x}_{۱}}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$A=A^{-۱}\rightarrow\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\sin\alpha=-\sin\alpha\rightarrow ۲\sin\alpha=۰\rightarrow\sin\alpha=۰\rightarrow\alpha=k\pi\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

۵ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲x \\ ۱ \end{bmatrix}=۶x^۲+۱=۷\rightarrow ۶x^۲=۶\rightarrow x^۲=۱\rightarrow x=\pm۱$$

۶ (**۱**) (۲) (۳) (۴) ابتدا ماتریس A را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+xy & -x+y^۲ \\ ۱-x & -۱-y \end{bmatrix}$$

ماتریس A وارون‌پذیر نیست. بنابراین داریم:

$$|A|=۰\rightarrow(x+xy)(-۱-y)-(۱-x)(-x+y^۲)=۰\rightarrow(-x-xy-xy-xy^۲)-(-x+y^۲+x^۲-xy^۲)=۰\rightarrow\cancel{-x}-۲xy-\cancel{xy^۲}$$
$$+\cancel{x}-y^۲-x^۲+\cancel{xy^۲}=۰\rightarrow x^۲+y^۲+۲xy=۰\rightarrow(x+y)^۲=۰\rightarrow y=-x\quad(۱)$$

حال ماتریس B و از روی آن ماتریس $B^{-۱}$ را می‌سازیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۲x & -y \\ -۶y & ۲x \end{bmatrix}\xrightarrow{(۱)}B=\begin{bmatrix} ۲x & x \\ ۶x & ۲x \end{bmatrix}\rightarrow|B|=(۲x)(۲x)-x(۶x)=-۲x^۲$$

$$B^{-۱}=\frac{۱}{-۲x^۲}\begin{bmatrix} ۲x & -x \\ -۶x & ۲x \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲x}\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۶ & -۲ \end{bmatrix}\rightarrow(۴x)(B^{-۱})=\begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۱۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

۷ (۱) (۲) (۳) (**۴**) با توجه به فرض سؤال داریم:

$AB = B \ (1) \quad , \quad BA = A \ (2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = B \xrightarrow{(2)} (BA)B = B \xrightarrow{(1)} BB = B \Rightarrow B^2 = B \\ BA = A \xrightarrow{(1)} (AB)A = A \xrightarrow{(2)} AA = A \Rightarrow A^2 = A \end{cases}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + B + A + B = 2(A+B)$$

$$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = 2(A+B)(A+B)$$

$$= 2(A+B)^2 = 4(A+B)$$

توجه: اگر $A = B = I$ باشد حاصل برابر با $8I$ است و فقط گزینه‌ی «۴» درست است.

۸ ‌ **۴** ۳ ۲ ۱ ماتریس $B^2 - B + I$ را برحسب $A^2 - A + I$ به دست می‌آوریم:

$$B^2(A^2 - A + I) = B^2A^2 - B^2A + B^2$$

$$\rightarrow B^2(A^2 - A + I) = I^2 - B(\underbrace{BA}_{I}) + B^2$$

$$\rightarrow B^2(A^2 - A + I) = I - B + B^2 \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می‌گیریم}} |B^2||A^2 - A + I| = |I - B + B^2| = (\sqrt{5})^2(2) = 10$$

۹ ‌ ۴ ۳ ۲ **۱** طرفین رابطهٔ ماتریسی را در وارون $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

X مجموع درایه‌های قطر اصلی $= 1 + 0 = 1$

۱۰ ‌ ۴ ۳ **۲** ۱

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{bmatrix} = 2a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2aA$$

$$A^3 = A \times A^2 = A \times 2aA = 2aA^2 \xlongequal{A^2 = 2aA} 2a(2aA) = 2^2a^2A = (2a)^2A$$

در نتیجه ماتریس A^n بصورت زیر است:

$$A^n = (2a)^{n-1}A = 2^{n-1}a^{n-1}A$$

$$\begin{cases} A^n = 2^{2n-2} \times 3^{n-1}A \\ A^n = 2^{n-1}a^{n-1}A \end{cases} \Rightarrow 2^{2n-2} \times 3^{n-1} = 2^{n-1}a^{n-1} \Rightarrow (2^2 \times 3)^{n-1} = (2a)^{n-1} \Rightarrow 12 = 2a \Rightarrow a = 6$$

۱۱ ‌ **۴** ۳ ۲ ۱ برای به دست آوردن سطراول A^2 کافی است سطراول A را در ستون‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^2 \text{ سطراول} = [2 \ \ 1 \ \ 5] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [6 \ \ 2 \ \ 24]$$

برای به دست آوردن سطر اول A^3 کافی است سطراول A^2 را در ستون‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^3 \text{ سطراول} = [6 \ \ 2 \ \ 24] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [30 \ \ 6 \ \ 86]$$

۱۲ ‌ ۴ **۳** ۲ ۱ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، آنگاه $A^n = \begin{cases} 3^k I, n = 2k \\ 3^k A, n = 2k+1 \end{cases}$، پس:

$$A^{2n} + A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 3 \times 3^n + 3^{n+1} = 2 \times 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2 \times 3^{n+1} = 1458 \Rightarrow 3^{n+1} = 729 = 3^6$$

۱۳ ‌ ۴ ۳ **۲** ۱ طبق تعریف ارائه شده برای ماتریس‌های A و B و C داریم:

$$A = [i+j]_{1\times 2} = [2 \quad 3]$$

$$B = [i-j]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ij]_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$ABC = [۲ \quad ۳] \times \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = [۳ \quad -۲]\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = -۱$$

(۱۴) (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$
$$A^۳ = A \times A^۲ = A^۲ \times A = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = I$$
$$A^{۲۰} = A^{۱۸} \times A^۲ = (A^۳)^۶ \times A^۲ = I^۶ \times A^۲ = I \times A^۲ \Rightarrow A^{۲۰} = A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

تذکر: توان‌های یک ماتریس مربعی خاصیت جابه‌جایی دارند.

$$A^۳ \times A^۵ = A^۵ \times A^۳ = A^۲ \times A^۶ = A^۶ \times A^۲$$

(۱۵) (۱) **(۲)** (۳) (۴) توان‌های دوم و سوم ماتریس داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۷ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$
$$A^۳ = \begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ & ۷ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

همان‌طور که می‌بینید $A^۳ = I$ می‌شود، پس:

$$A^{۲۵۱} = A^{۲۴۹} \times A^۲ = (A^۳)^{۸۳} \times A^۲ = I^{۸۳} \times A^۲ = A^۲$$

(۱۶) **(۱)** (۲) (۳) (۴) ضرب ماتریسی را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۵b_۱ - ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix}$$

پس:

$$\to \begin{cases} ۵b_۱ - ۲b_۲ = ۴b_۱ \to b_۱ = ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \xrightarrow{b_۱ = ۲b_۲} ۸b_۲ + ab_۲ = ۴b_۲ \to ۸ + a = ۴ \to a = -۴ \end{cases}$$

(۱۷) (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$AX = -A + ۲I \Rightarrow A^{-۱}(AX) = -A^{-۱}A + ۲A^{-۱}I \Rightarrow X = -I + ۲A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

(۱۸) **(۱)** (۲) (۳) (۴) اگر A وارون‌پذیر و B مربعی و هم‌مرتبه با A باشد، رابطهٔ $(A^{-۱}BA)^۲ = A^{-۱}B^۲A$ همواره برقرار است، بنابراین:

$$\left[C^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}C\right]^۲ = C^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^۲ C = C^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}C = C^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}C$$

(۱۹) (۱) (۲) **(۳)** (۴) ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ + \tan^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ + \tan^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$
$$A^۷ = (A^۲)^۳ \times A = I^۳ \times A = A \ , \ A^۸ = (A^۲)^۴ = I^۴ = I$$
$$A^۷ + A^۸ = I + A$$

(۲۰) (۱) (۲) **(۳)** (۴) ماتریس $A^۲$ را می‌سازیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$
$$A^۲ = I \xrightarrow{\times A} A^۳ = A \xrightarrow{\times A} A^۴ = A^۲ = ۱$$

به همین ترتیب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} A^n = I; \text{عدد طبیعی زوج } n \\ A^n = A; \text{عدد طبیعی فرد } n \end{cases}$$

پس داریم:

$$A^{۹۹} + A^{۱۰۰} = A + I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱+۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = ۶$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۴
۳	۴
۴	۱
۵	۳
۶	۱
۷	۴
۸	۴
۹	۱
۱۰	۲
۱۱	۴
۱۲	۳
۱۳	۲
۱۴	۲
۱۵	۲
۱۶	۱
۱۷	۴
۱۸	۱
۱۹	۳
۲۰	۳