نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم فصل اول تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$(A^{-1}BA)^{n}=A^{-1}B^{n}A$$

۲) اگر A وارون‌پذیر و $A^{2}=A$ باشد، وارون $(I-3A)$ را بیابید.

۳) نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0$ معادلهٔ خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد.

۴) اگر $A^{2}=A$ و m یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$(I-mA)^{-1}=I+\frac{m}{1-m}A$$

۵) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{20} را به دست آورید.

۶) اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=-2$، حاصل $||A|\cdot A|$ را بیابید.

۷) قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصربه‌فرد است.

۸) در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=0$ مقدار x را بیابید.

۹) نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است.

۱۰) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۱) فرض کنید a, b, c, d چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است:

$$A=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 3 & 6 & 24 \\ b & \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ c & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ d & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}$$

در این ماتریس، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به‌عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم، A^{2} را پیدا کنید؟

۱۲) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ نشان دهید

$CA=C,\ AC=A,\ AB=BA=O$

۱۳) مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x+my=1 \\ (m-1)x+y=3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۱۴) دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۱۵ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A \cdot B$ را محاسبه کنید.

۱۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

۱۷ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

۱۸ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.

۱۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر .... است.

ب اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $|A|=۵$، آنگاه $|\frac{۱}{۲}A|$ برابر .... است.

۲۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون .... نامیده می‌شود.

پاسخنامه تشریحی

۱
$$(A^{-۱}BA)^{۲} = (A^{-۱}BA)(A^{-۱}BA) = A^{-۱}B(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA = A^{-۱}B^{۲}A$$

$$(A^{-۱}BA)^{۳} = (A^{-۱}B^{۲}A)(A^{-۱}BA) = A^{-۱}B^{۲}(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA = A^{-۱}B^{۳}A$$

به همین ترتیب داریم: $(A^{-۱}BA)^{n} = A^{-۱}B^{n}A$

۲
$$A^{۲} = A \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^{-۱}} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}A = \underbrace{A^{-۱}A}_{I} \to A = I$$

$$\to (I - ۳A)^{-۱} = (I - ۳I)^{-۱} = (-۲I)^{-۱} = -\frac{۱}{۲}I^{-۱} = -\frac{۱}{۲}I$$

۳ معادلهٔ خطی که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y - b = \frac{b-d}{a-c}(x-a) \to y = (\frac{b-d}{a-c})x - (\frac{ab-ad}{a-c}) + b$$

$$\to y = (\frac{d-b}{c-a})x + \frac{bc-ad}{c-a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{matrix} = ۰ \to (bx + yc + ad) - (ay + dx + bc) = ۰$$

$$(b-d)x + (c-a)y + (ad-bc) = ۰$$

$$(c-a)y = (d-b)x + (bc-ad)$$

$$y = (\frac{d-b}{c-a})x + \frac{bc-ad}{c-a}$$

۴ باید ضرب دو ماتریس $(I + \frac{m}{۱-m}A)$ و $(I - mA)$ برابر I شود.

$$(I - mA)(I + \frac{m}{۱-m}A) = I + \frac{m}{۱-m}A - mA - \frac{m^{۲}A^{۲}}{۱-m}$$

$$= I + \frac{m - m(۱-m) - m^{۲}}{۱-m}A = I + \frac{۰}{۱-m}A = I$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $(I + \frac{m}{۱-m}A)(I - mA)$ هم برابر I می‌شود.

۵
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \to A^{۲۰} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دقت کنید فقط درایهٔ سطر اول و ستون دوم متغیر است.

۶
$$||A| \cdot A| = |-۲A| = (-۲)^{۳}|A| = -۸ \times (-۲) = ۱۶$$

۷ فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B = C$.

طبق فرض : $AB = BA = I$

طبق فرض : $AC = CA = I$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

۸ ضرب ماتریسی را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$[\,۳x-۶ \quad -۶x+۱۲\,]\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow[\,-۳x+۶-۶x+۱۲\,]=۰\rightarrow-۹x+۱۸=۰\rightarrow x=۲$$

۹ کافیست نشان دهیم: $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}۷&۴\\ ۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۴\\ ۲&-۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱&۴\\ ۲&-۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۴\\ ۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=I$$

۱۰ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\ c&d\end{bmatrix}$ به‌صورت $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\ -c&a\end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}۱۰&۲\\ ۴&۱\end{bmatrix}\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&-۲\\ -۴&۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-۱\\ -۲&۵\end{bmatrix}$$

۱۱ می‌دانیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می‌توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases}a=mb\\ b=nc\end{cases}\Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده‌شده به‌طور مثال $a_{۱۲}$ یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و $a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از b چند واحد از d است. بنابراین $a_{۱۲}\times a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از a چند واحد از d است که این همان مقدار $a_{۱۴}$ می‌باشد.

پس در حالت کلی می‌توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطهٔ فوق اگر $A^{۲}=[m_{ij}]_{۴\times۴}$ باشد:

$$m_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴}a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک‌تک درایه‌های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه‌های $A^{۲}$ ایجاد شوند.

۱۲

$$AB=BA=O\Longrightarrow\begin{cases}AB=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\ -۱&۴&۵\\ ۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\ ۱&-۳&-۵\\ -۱&۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}\\ \\ BA=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\ ۱&-۳&-۵\\ -۱&۳&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\ -۱&۴&۵\\ ۱&-۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}\end{cases}$$

$$AC=A\Rightarrow AC=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\ -۱&۴&۵\\ ۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\ -۱&۳&۴\\ ۱&-۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\ -۱&۴&۵\\ ۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\Rightarrow AC=A$$

$$CA=C\Rightarrow CA=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\ -۱&۳&۴\\ ۱&-۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\ -۱&۴&۵\\ ۱&-۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\ -۱&۳&۴\\ ۱&-۲&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow CA=C$$

۱۳

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\rightarrow\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳}\rightarrow m(m-۱)=۲\rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

۱۴

$$A=\begin{bmatrix}۲&۱\\ ۷&۴\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}\quad,\quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}\times B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۸-۷}\begin{bmatrix}۴&-۱\\ -۷&۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=۱\,،\,y=۲$$

۱۵

$$\begin{cases}m-۲=۰\\ n+۱=۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=۲\\ n=-۱\end{cases}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\ ۰&۳&۰\\ ۰&۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\ ۲&۰&-۱\\ ۳&-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲&۲\\ ۶&۰&-۳\\ ۹&-۳&۶\end{bmatrix}$$

۱۶ از آنجایی که ماتریس قطری است؛ همه درایه‌ها جز درایه‌های قطر اصلی برابر صفر است؛ داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\ b-۳&-۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۱۷

$$A \text{ ماتریس قطری} \Rightarrow \begin{cases} m-۲=۰ \to m=۲ \\ n+۱=۰ \to n=-۱ \end{cases}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \to |B|=۲(-۱)-۱(۷)+(-۲)=-۱۱\,,\ |A|=۲$$

در نتیجه:

$$|A|+|B|=۲+(-۱۱)=-۹$$

۱۸

الف درست

۱۹

برای آنکه ماتریس قطری باشد، باید:

الف

$$m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$$

ب

$$\left|\frac{۱}{۲}A\right|=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}|A|=\frac{۵}{۸}$$

۲۰

الف ماتریس