نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم فصل اول تشریحی

تاریخ آزمون:

۱ اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$(A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA$$

۲ اگر A وارون‌پذیر و $A^2 = A$ باشد، وارون $(I - 3A)$ را بیابید.

۳ نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادلهٔ خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد.

۴ اگر $A^2 = A$ و m یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$(I - mA)^{-1} = I + \frac{m}{1-m}A$$

۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{20} را به دست آورید.

۶ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = -2$، حاصل $|A| \cdot A||$ را بیابید.

۷ قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصربه‌فرد است.

۸ در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مقدار x را بیابید.

۹ نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است.

۱۰ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۱ فرض کنید a, b, c, d چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

در این ماتریس، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به‌عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم، A^2 را پیدا کنید؟

۱۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ نشان دهید

$$CA = C, AC = A, AB = BA = O$$

۱۳ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m-1)x + y = 3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۱۴ دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۱۵ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A\cdot B$ را محاسبه کنید.

۱۶ اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۱۷ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲\\ n+۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

۱۸ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.

۱۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ m-۱ & ۴\end{bmatrix}$ مقدار m برابر ..... است.

ب اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $|A|=۵$، آنگاه $|\frac{۱}{۲}A|$ برابر ..... است.

۲۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.