نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم فصل دوم تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

ب در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A|\neq ۰$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

پ برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در $\mathbb{R}^۳$ داریم: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

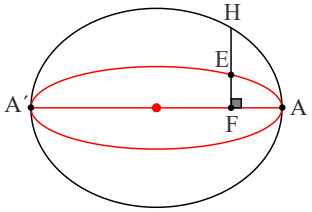
۲) طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی و خروج از مرکز بیضی را بیابید که نقاط $A(۳,۴)$ و $A'(۳,-۴)$ دو رأس کانونی آن و طول قطر کوچک آن $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ کانونی می‌باشد.

۳) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y=۲x$ باشد و از دو نقطهٔ $A(۱,-۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد.

۴) معادلهٔ سهمی با کانون $F(۲,-\frac{۷}{۲})$ و خط هادی $y=-\frac{۵}{۲}$ را به دست آورید.

۵) در یک بیضی با خروج از مرکز e ثابت کنید اندازهٔ قطر کوچک برابر است با: $BB'=۲a\sqrt{۱-e^۲}$

۶) در شکل مقابل قطر دایره بر قطر بزرگ بیضی منطبق است. از کانون F عمودی بر محور کانونی رسم می‌کنیم تا بیضی و دایره را به‌ترتیب در نقاط E و H قطع کند. ثابت کنید: $\frac{HF}{EF}=\frac{a}{b}$



۷) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس داخل باشد.

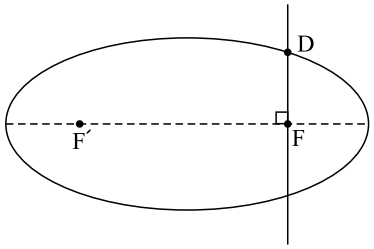
۸) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r را مشخص کنید که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

۹) اگر نقطهٔ $A=(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادلهٔ خط هادی سهمی باشد.

الف مختصات کانون سهمی را به دست آورید

ب معادلهٔ سهمی را بنویسید.

۱۰) بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، ثابت کنید: $DF=\frac{b^۲}{a}$

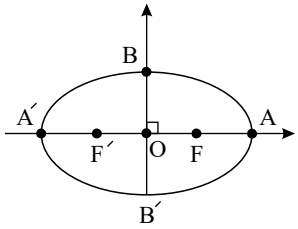


۱۱) دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر است.

۱۲) الف) معادلهٔ متعارف و فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y-۸x+۹=۰$ را بیابید.

ب) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.

۱۳ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



۱۴ در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به‌ترتیب $2a$ و $2b$، طول وتر کانونی را به دست آورید.

۱۵ مربع $ABCD$ به طول ضلع a مفروض است. مکان هندسی نقاطی درون مربع را بیابید که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع بین $\frac{a}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ باشد.

۱۶ سهمی $y^2 = 4x$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۷ اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصلهٔ کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطهٔ A در ..... بیضی است.

ب) هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از ..... خواهد گذشت.

۱۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصلهٔ کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ..... است.

ب) سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۲۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

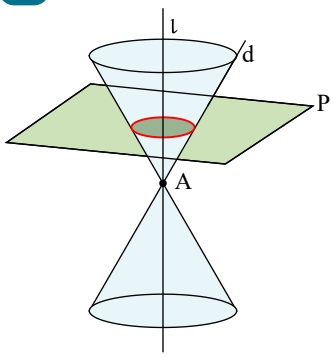
الف) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (I) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

ب) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ درست

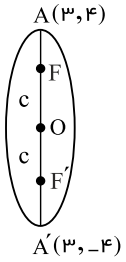
الف



ب نادرست

پ درست

۲ بیضی قائم می‌باشد. می‌دانیم که مرکز بیضی وسط AA' می‌باشد. داریم:



$$O\begin{cases} x_O = \frac{۳+۳}{۲} = ۳ \\ y_O = \frac{۴-۴}{۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow O(۳,۰)$$

$$OA = a = \sqrt{(۳-۳)^۲ + (۴-۰)^۲} = ۴$$

$$۲b = \frac{۳}{۴} \times ۲c \Rightarrow b = \frac{۳}{۴}c \Rightarrow c = \frac{۴}{۳}b$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = b^۲ + \frac{۱۶}{۹}b^۲ = \frac{۲۵}{۹}b^۲ \Rightarrow b^۲ = \frac{۹ \times ۱۶}{۲۵} \Rightarrow b = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

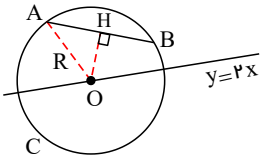
$$\text{قطر کوچک} = ۲b = \frac{۲۴}{۵}$$

$$c = \frac{۴}{۳} \times b = \frac{۴}{۳} \times \frac{۱۲}{۵} = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\text{فاصلهٔ کانونی} = ۲c = \frac{۳۲}{۵}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۵}$$

۳ از آنجا که مرکز دایره روی خط $y = ۲x$ قرار دارد، پس مختصات آن به‌صورت $O(\alpha, ۲\alpha)$ می‌باشد. مطابق شکل داریم:



معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-۲\alpha)^۲=R^۲$

$$\begin{cases} A(۱\ ,\ -۲)\in C \Rightarrow (۱-\alpha)^۲+(-۲-۲\alpha)^۲=R^۲ \\ B(۳\ ,\ ۰)\in C \Rightarrow (۳-\alpha)^۲+(۰-۲\alpha)^۲=R^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^۲-۲\alpha+۱+۴+۴\alpha^۲+۸\alpha=R^۲ \\ ۹+\alpha^۲-۶\alpha+۴\alpha^۲=R^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵\alpha^۲+۶\alpha+۵=R^۲ \\ ۵\alpha^۲-۶\alpha+۹=R^۲ \end{cases} \quad (۱)$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲+۶\alpha+۵=۵\alpha^۲-۶\alpha+۹ \Rightarrow ۱۲\alpha=۹-۵=۴ \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۳}$$

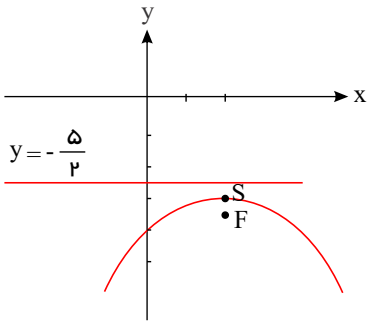
$$\xrightarrow{(۱)} R^۲=۵\times\frac{۱}{۹}-۲+۹=\frac{۵}{۹}+۷=\frac{۶۸}{۹} \quad ,\quad O(\alpha\ ,\ ۲\alpha)=(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$$

معادلهٔ دایره: $(x-\frac{۱}{۳})^۲+(y-\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۶۸}{۹}$

۴

$$\left.\begin{array}{l} F(۲,-\frac{۷}{۲}) \\ \text{خط هادی } y=-\frac{۵}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow ۲a=-\frac{۵}{۲}-(-\frac{۷}{۲})=\frac{۲}{۲}=۱ \rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

مختصات رأس: $S(۲,-\frac{۷}{۲}+\frac{۱}{۲})=(۲,-۳)$



سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است.

$$(x-۲)^۲=-۴(\frac{۱}{۲})(y-(-۳))$$

$$\rightarrow (x-۲)^۲=-۲(y+۳)$$

۵ اگر طول قطر بزرگ $۲a$، طول قطر کوچک $۲b$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$ باشد. داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow{\div a^۲} ۱=(\frac{b}{a})^۲+(\frac{c}{a})^۲ \rightarrow ۱=(\frac{b}{a})^۲+e^۲$$

$$\rightarrow (\frac{b}{a})^۲=۱-e^۲ \rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{۱-e^۲} \rightarrow b=a\sqrt{۱-e^۲}$$

قطر کوچک: $BB'=۲b=۲a\sqrt{۱-e^۲}$

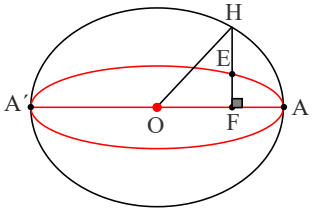
۶

$$AA'=۲R=۲a \rightarrow R=a \rightarrow OH=a$$

$$\overset{\triangle}{OHF}: OH^۲=OF^۲+HF^۲ \rightarrow a^۲=c^۲+HF^۲ \rightarrow HF=\sqrt{a^۲-c^۲}$$

$$a^۲=c^۲+b^۲ \rightarrow b=\sqrt{a^۲-c^۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \rightarrow HF=b$$



اندازهٔ FE برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی می‌باشد:

$$EF=\frac{b^۲}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} HF=b \\ EF=\frac{b^۲}{a} \end{array}\right\} = \frac{HF}{EF}=\frac{b}{\frac{b^۲}{a}}=\frac{a}{b}$$

۷

$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰ \to O' = (-\frac{-۴}{۲}, -\frac{-۶}{۲}) = (۲, ۳)$

$R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲ + (-۶)^۲ - ۴(-۳)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ + ۱۲} = \frac{\sqrt{۶۴}}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$

بررسی وضعیت مرکز $O(۰, ۱)$ نسبت به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰$:

مختصات مرکز را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم.

بنابراین O درون دایره قرار دارد و مسئله دو جواب دارد و دو دایرهٔ مماس داخل بر آن می‌توان رسم کرد. $۰^۲ + ۱^۲ - (۴ \times ۰) - (۶ \times ۱) - ۳ = -۸ < ۰$

طول خط‌المرکزین (OO') را به دست می‌آوریم.

$OO' = \sqrt{(۰ - ۲)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$

برای اینکه دو دایره مماس داخل باشند باید داشته باشیم:

$$OO' = |R - R'| \to ۲\sqrt{۲} = |R - ۴| \to \begin{cases} R_۱ - ۴ = ۲\sqrt{۲} \to R_۱ = ۲\sqrt{۲} + ۴ \\ R_۲ - ۴ = -۲\sqrt{۲} \to R_۲ = ۴ - ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

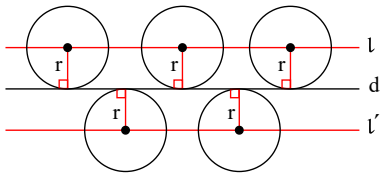
معادلهٔ دو دایره مماس داخل با دایرهٔ داده‌شده به‌صورت زیر هستند:

$C_۱ : (x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲$

$C_۲ : (x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = (۴ - ۲\sqrt{۲})^۲$

۸

مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d مماس‌اند به فاصلهٔ r از خط d و در دو طرف آن قرار دارند. بنابراین مکان هندسی موردنظر دو خط موازی d در دو طرف آن و به فاصلهٔ r از آن می‌باشد.



۹

الف مختصات کانون سهمی برابر $F(h, -a + k) = (۲, -۴ + ۳) = (۲, -۱)$ است.

ب با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانهٔ سهمی رو به پایین بوده و $a = ۴$ است. داریم:

رأس سهمی: $(h, k) = (۲, ۳) \Rightarrow h = ۲, k = ۳$

معادلهٔ سهمی: $(x - h)^۲ = -۴a(y - k) \Rightarrow (x - ۲)^۲ = -۱۶(y - ۳)$

۱۰ نقطهٔ D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیهٔ فیثاغورث داریم:

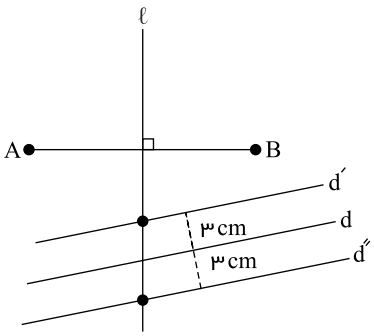
$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \to DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$

$DF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲ - c^۲ = b^۲} DF = \frac{b^۲}{a}$

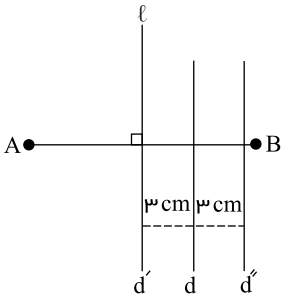
۱۱ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم.

مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی d هستند که d' و d'' می‌نامیم. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مسئله است.

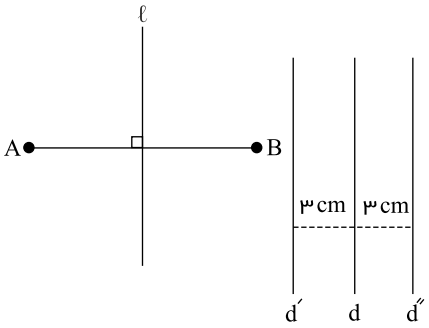
الف- اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند، مسئله دو جواب دارد.



ب- اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' را منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



پ- اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



۱۲ الف)

معادلهٔ متعارف سهمی:

$$y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = ۸x - ۹ + ۱ \Rightarrow (y-۱)^۲ = ۸(x-۱)$$

فاصله کانونی سهمی:

$$۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

ب)

رأس سهمی:

$$(h\,,k) = (۱\,,۱)$$

معادلهٔ خط هادی سهمی:

$$x = -a + h \Rightarrow x = -۱$$

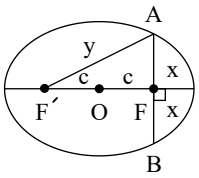
مختصات کانون:

$$(a+h\,,k) = (۳\,,۱)$$

۱۳

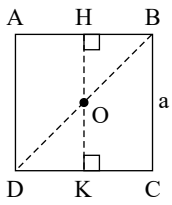
$OF = c = ۴\ ,\ \ OA = a = ۸$ می‌دانیم و $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \rightarrow b = ۴\sqrt{۳} \rightarrow$ طول قطر کوچک: $۲b = ۸\sqrt{۳}$

۱۴ در شکل مقابل AB وتر کانونی است. داریم:



$$A\hat{F}F' = ۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} y^۲ = ۴c^۲ + x^۲ \\ x + y = ۲a \Rightarrow y = (۲a - x) \end{cases} \Rightarrow (۲a-x)^۲ = ۴c^۲ + x^۲ \Rightarrow ۴a^۲ + x^۲ - ۴ax = ۴c^۲ + x^۲ \Rightarrow x = \frac{b^۲}{a} \Rightarrow AB = ۲x = \frac{۲b^۲}{a}$$

۱۵ اگر O مرکز مربع باشد داریم:



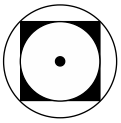
$$HK = a\,,\ OH = OK \Rightarrow OH = OK = \frac{a}{۲}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل H و K که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a}{۲}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a}{۲}$ می‌باشد. داریم:

$$BD = a\sqrt{۲} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل B و D که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.

در صورت سؤال، نقاطی موردنظر است که داخل مربع بوده و بین دو دایره قرار گیرد که همان قسمت هاشورزده شده است.



۱۶

$$y^۲ = ۴(x-۱) \to S(۱,۰)\ ,\ F(۲,۰)$$

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹\ ,\ \begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \to \begin{cases} x = ۳ \text{ قق} \\ x = -۳ \text{ غق} \end{cases}$$

$$M(۳, ۲\sqrt{۲})\ ,\ M'(۳, -۲\sqrt{۲})$$

۱۷

$$۲b = ۲۴ \Rightarrow b = ۱۲\ ,\ c = ۵ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ \to a = ۱۳$$ خروج از مرکز: $\frac{c}{a} = \frac{۵}{۱۳}$

۱۸

الف بیرون

ب کانون سهمی

۱۹

الف

$\frac{۱}{۲}$

طول قطر بزرگ $= ۲ \times$ (فاصلهٔ کانونی) $\Rightarrow ۲a \Rightarrow ۲ \times ۲c \Rightarrow a = ۲c$

پس:

خروج از مرکز: $\frac{c}{a} = \frac{c}{۲c} = \frac{۱}{۲}$

ب نقطه

۲۰

الف درست

ب نادرست