نام و نام خانوادگی:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم فصل سوم تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) اگر طول دو بردار a و b برابرهم بوده و زاویهٔ بین آنها θ باشد، ثابت کنید:

$$|a-b| = 2\,|a|\sin\frac{\theta}{2}$$

۲) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر .... است.

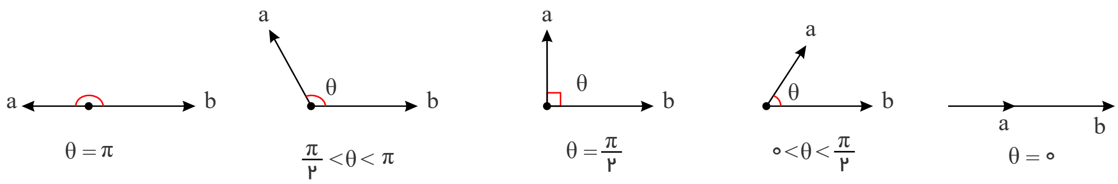
۳) اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به دست آورید.

۴) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a}\times\vec{b}| = 72$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۵) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

۶) هریک از حالات زیر را با شکل‌های داده‌شده نظیر کنید.

الف) $a\cdot b > 0$　　ب) $a\cdot b = 0$　　پ) $a\cdot b < 0$　　ت) $a\cdot b = |a|\,|b|$　　ث) $a\cdot b = -|a|\,|b|$



۷) اگر بردار a'' قرینهٔ بردار a نسبت به بردار $b = (1, -1, 1)$ بوده و $a\cdot b = 6$ باشد، مساحت مثلث بناشده روی دو بردار a, a'' چه مضربی از $|a\times b|$ است؟

۸) کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

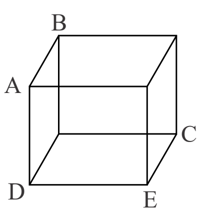
الف) اگر بردار a یک ضلع متوازی‌الاضلاع و بردار d یک قطر آن باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |a\times d|$

ب) اگر d و d' قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |d\times d'|$

۹)

در مکعب مقابل طول یال‌ها برابر $\sqrt[3]{2}$ است. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$　　　　ب) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$



۱۰) برای دو بردار غیر صفر a و b رابطهٔ $|2a-b| = |a+b|$ برقرار است. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $(2b-a)\perp a$　　　　ب) $|a| = 2\,|b|$

۱۱) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اگر $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1)$ و $\overrightarrow{AC} = (1, 1, -1)$ باشد، طول بردار $\overrightarrow{DB}$ را به دست آورید.

۱۲) بردار $\vec{a}'$ قرینهٔ بردار $\vec{a}(3, -1, -2)$ نسبت به محور yها و بردار $\vec{b}''$ قرینهٔ بردار $b(m\,, n\,, -1)$ نسبت به محور xهاست. اگر b' در امتداد a' باشد، اندازهٔ بردار $a' + 2b'$ کدام است؟

۱۳ مقدار α طوری تغییر می‌کند که نقطهٔ $M=(۱,\alpha-۱,\alpha+۳)$ در زمان $t_{\circ}$ کمترین فاصلهٔ خود را با محور xها اختیار می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M تا محور yها را در زمان $t_{\circ}$ به دست آورید.

۱۴ الف) مختصات چند نقطه را مشخص کنید که در رابطهٔ $\begin{cases} x=\circ \\ z=\circ \end{cases}$ صدق کنند و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

ب) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=\circ \\ z=\circ \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادلهٔ $x=\circ$ دارد؟

۱۵ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$، در این صورت زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۱۶ در فضای سه‌بعدی نقطه A روی محور xها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض -۳ و ارتفاع ۴ مفروض است، اصله وسط پاره‌خط AB تا مبدا مختصات را به دست آورید.

۱۷ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,\circ,-۱)$ برابر ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.

۱۸ معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور Zها در نقطه به مختصات $A=(\circ,\circ,۳)$ عمود باشد، به‌صورت .... است.

۱۹ برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\circ$.

۲۰ دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(\circ,۲,-۱)$ را در نظر بگیرید.

الف بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^۳$ واقع است؟ (شمارهٔ ناحیه ذکر شود.)

ب طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخنامه تشریحی

۱ طبق قضیهٔ کسینوس‌ها:

$$|a-b|^{۲}=|a|^{۲}+|b|^{۲}-۲\,|a|\,|b|\cos\theta$$

فرض مسئله: $|a|=|b|\Rightarrow|a-b|^{۲}=۲|a|^{۲}-۲|a|^{۲}\cos\theta=۲|a|^{۲}\underbrace{(۱-\cos\theta)}_{۲\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}$

$$\Rightarrow|a-b|^{۲}=۴|a|^{۲}\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}\xrightarrow{\text{جذر}}|a-b|=۲\,|a|\sin\frac{\theta}{۲}$$

۲

الف) صفر یا $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$

۳

$$\vec{a}-۲\vec{b}=(۲,۰,-۱)-(۲,۴,۲)=(۰,-۴,-۳)\ ,\ |\vec{a}-۲\vec{b}|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

۴

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}\to\cos\theta=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}}=\pm\frac{۵}{۱۳}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$$

۵

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۰\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰\xrightarrow[|\vec{b}|\neq۰]{|\vec{a}|\neq۰}\cos\theta=۰\xrightarrow{۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}}\theta=\frac{\pi}{۲}$$

۶ الف) $a\cdot b>۰$

ب) $a\cdot b=۰$

پ) $a\cdot b<۰$

ت) $a\cdot b=|a|\,|b|$

ث) $a\cdot b=-\,|a|\,|b|$

۷

$$b=(۱,-۱,۱)\quad,\quad a\cdot b=۶\quad,\quad|b|=\sqrt{۳}$$

$$a'=\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}b=\frac{۶}{۳}b\Rightarrow(\text{تصویر قائم } a \text{ در امتداد بردار } b)a'=۲b$$

$$\Rightarrow S_{OHA}=\frac{۱}{۲}|a'\times a|=\frac{۱}{۲}|۲b\times a|=|a\times b|$$

$$\Rightarrow S_{OAB}=۲S_{OHA}=۲\,|a\times b|$$

پس مساحت مثلثی که روی دو بردار a, a'' ساخته می‌شود، ۲ برابر $|a\times b|$ است.

۸ الف) درست. زیرا:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=۲S_{ABC}=۲\times\frac{۱}{۲}|a\times d|=|a\times d|$$

ب) نادرست. زیرا:

$$\begin{cases}|d\times d'|=|(a+b)\times(a-b)|=\left|\underbrace{a\times a}_{۰}-a\times b+\underbrace{b\times a}_{-a\times b}-\underbrace{b\times b}_{۰}\right|=|-۲a\times b|=۲\,|a\times b|=۲S\\ \\ d=a+b\\ d'=a-b\end{cases}$$

$$\Rightarrow|d\times d'|=۲S\to S=\frac{۱}{۲}|d\times d'|$$

۹

یال مکعب $a=۳\sqrt{۲}\Rightarrow$ (وجه‌ها) قطر مربع $=a\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۶$

الف) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA}=\underbrace{|AB|}_{a}\underbrace{|FA|}_{a\sqrt{۲}}\cos ۱۳۵^\circ$

$$= ۳\sqrt{۲}\times ۶(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱۸$$

ب) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\underbrace{|AB|}_{a}\underbrace{|AG|}_{a}\cos ۹۰^\circ = ۳\sqrt{۲}\times ۳\sqrt{۲}\times ۰ = ۰$

۱۰ الف) یادآوری:

$|a|=|b| \Rightarrow (a+b)\perp(a-b)$

فرض: $|۲a-b|=|a+b| \Rightarrow ((۲a-b)+(a+b))\perp((۲a-b)-(a+b))$

$\Rightarrow ۳a\perp(a-۲b)$ یا $a\perp(۲b-a) \Rightarrow$ درست

ب) نادرست. زیرا طبق (الف) داریم:

$(۲b-a)\perp a \Rightarrow (۲b-a)\cdot a = ۰$

$\Rightarrow ۲a\cdot b - |a|^۲ = ۰ \Rightarrow ۲\,|a|\,|b|\cos\theta = |a|^۲ \Rightarrow ۲\,|b|\cos\theta = |a|$

۱۱

$\overrightarrow{AB}=(۳,۲,۱)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(۱,۱,-۱)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-۲,-۱,-۲) \\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(-۳,-۲,-۱)+(-۲,-۱,-۲)=(-۵,-۳,-۳) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{۲۵+۹+۹}=\sqrt{۴۳}$$

۱۲

$$\begin{cases} \vec{a}=(۳,-۱,-۲) \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} a'=(-۳,-۱,۲) \\ \vec{b}=(m,n,-۱) \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} b'=(m,-n,۱) \\ a'||b' \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{-۳}=\frac{-n}{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}\quad,\quad n=\frac{۱}{۲}\quad\Rightarrow\quad b'=(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},۱)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a'}+۲\overrightarrow{b'}=(-۶,-۲,۴)\ \Rightarrow\ |a'+۲b'|=\sqrt{۳۶+۴+۱۶}=\sqrt{۵۶}=۲\sqrt{۱۴}$$

۱۳

$$\begin{cases} M=(۱,\alpha-۱,\alpha+۳) \\ \text{فاصله } M \text{ تا محور } x\text{ها} = \sqrt{y^۲+z^۲}=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha+۳)^۲}=\sqrt{\underbrace{۲\alpha^۲+۴\alpha+۱۰}_{\text{باید مینیمم شود}}} \end{cases}$$

طول نقطهٔ مینیمم در تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ برابر است با: $x=-\frac{b}{۲a}$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{۴}{۲\times۲}=-۱ \Rightarrow \quad M=(۱,-۲,۲)$$

$\Rightarrow$ فاصلهٔ M تا محور yها $=\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۵}$

۱۴

الف) مختصات چند نقطه که در رابطهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ صدق کنند عبارتند از: $O(۰,۰,۰), A(۰,۱,۰), B(۰,۲,۰)$ و مکان آن نقاط طبق شکل مقابل روی محور yهاست.

ب) نمودار معادلهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ یک خط (همان محور yها) است.

$x=۰$ معادلهٔ صفحه‌ای شامل محور yها است. (صفحهٔ $x=۰$ همان صفحهٔ yoz است.)

۱۵

الف

صفر، زیرا:

$$a\cdot b=|a||b|\cos\theta=|a||b| \Rightarrow \cos\theta=۱ \xrightarrow{۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}} \theta=۰$$

۱۶ $A=(۲,۰,۰)$ و $b=(۰,-۳,۴)$

مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با $M=(\frac{۲+۰}{۲},\frac{۰+(-۳)}{۲},\frac{۰+۴}{۲})=(۱,\frac{-۳}{۲},۲)$

$$OM=\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۲۹}{۴}}$$

۱۷

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\to-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲-n}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۴+۱+n^۲}}\to\frac{n-۲}{\sqrt{n^۲+۵}}=۱$$

$$n^۲+۵=n^۲-۴n+۴\to n=-\frac{۱}{۴}$$

۱۸

$$Z=۳$$

۱۹ فرض کنیم $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ باشد، داریم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۰\to|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta=۰\xrightarrow{|\vec{a}|\neq۰,|\vec{b}|\neq۰}cos\theta=۰\to\theta=\frac{\pi}{۲}$$

برعکس: اگر دو بردار برهم عمود باشند، یعنی زاویه بین دو بردار ۹۰° باشد، داریم:

$$\theta=\frac{\pi}{۲}\to\cos\theta=۰\to|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta=۰\to\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$$

۲۰

الف بردار $\vec{a}$ در ناحیهٔ ۵ واقع است.

ب

$$۲\vec{a}-\vec{b}=۲(۱,۲,-۱)-(۰,۲,-۱)=(۲,۲,-۱)\Rightarrow|۲\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$$