نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم آزمون جامع تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) اگر $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ و $B^{2}=B^{-1}$ باشد، مقدار x چقدر است؟

۲) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2\,|A| & |A| \\ 5\,|A| & -3 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، معکوس A را بیابید.

۳) از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$، ماتریس A را محاسبه کنید.

۴) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.

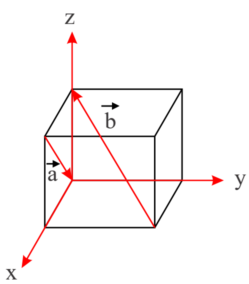
۵) اگر $\vec{c}=(-1,1,4)$, $\vec{b}=(3,-4,2)$, $\vec{a}=(-1,-3,0)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۶) اگر $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۷) معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۳ که مرکز آن روی تقاطع دو خط $y=2x+1$ و $y=x-2$ باشد را بنویسید.

۸) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y=2x$ باشد و از دو نقطهٔ $A(1,-2)$ و $B(3,0)$ بگذرد.

۹) در مکعب مقابل زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را به دست آورید.



۱۰) فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار a و b حاده بوده و $|a|=2$ و $|b|=\sqrt{2}$ باشد. اگر $|2a+b|^{2}=12a\cdot b$، اندازهٔ تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b را به دست آورید.

۱۱) ثابت کنید در یک بیضی با خروج از مرکز e، طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $2a(1-e^{2})$

۱۲) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^{3} را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۴) نقاط $A(3,1,2)$ و $B(3,-2,2)$ در $\mathbb{R}^{3}$ مفروض‌اند،

الف) طول پاره‌خط AB را به دست آورید.

ب) معادلات مربوط به پاره‌خط AB را بنویسید.

۱۵) اگر $A=(2,-1,3)$ و $B=(3,1,4)$ و $C=(-1,1,0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۱۶) خط $\begin{cases} x=2 \\ z=3 \end{cases}$ با محور .... موازی است.

۱۷) فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر با $12cm$ است. مکان هندسی نقاطی که وسط پاره‌خط AB (B روی d جابه‌جا می‌شود) قرار دارند چیست؟

۱۸) اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{4}-A^{7}$ را به دست آورید؟

۱۹ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+by=c' \end{cases}$، اگر $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ باشد، دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

ب مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ هرگاه صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

ت رابطهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱۰=۰$ معادلهٔ یک دایره است.

۲۰ سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y+۸x+۹=۰$ را در نظر بگیرید:

الف مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب نمودار سهمی را رسم کنید.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$B=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & x\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}x & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

$$B^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -x\\ x & x^{۲}-۱\end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=B^{۲}\rightarrow\begin{bmatrix}x & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -x\\ x & x^{۲}-۱\end{bmatrix}\rightarrow x=-۱$$

۲

$$A=\begin{bmatrix}|A| & ۲\,|A|\\ -۳ & ۵\,|A|\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{از دو طرف دترمینان می‌گیریم.}}|A|=۵|A|^{۲}+۶\,|A|\rightarrow ۵|A|^{۲}+۵\,|A|=۰$$

$$\rightarrow ۵\,|A|\,(|A|+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}|A|=۰ & \text{غ ق ق}\\ |A|=-۱\end{cases}$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ -۳ & -۵\end{bmatrix}\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-۵ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}$$

۳

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۵ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow BAC=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow\underbrace{B^{-۱}B}_{I}A\underbrace{CC^{-۱}}_{I}=B^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}C^{-۱}\Rightarrow A=B^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}C^{-۱}$$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=۴-۳=۱$$

$$\Rightarrow B^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۵ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow|C|=۹-۱۰=-۱$$

$$\Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\times\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ -۵ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}C^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۱ & ۱۹\\ -۴۹ & -۳۰\end{bmatrix}$$

۴

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow ۷۲=۳\times ۲۶\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}\rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}}=\pm\frac{۵}{۱۳}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳\times ۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm ۳۰$$

۵

$$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)\ ,\ \ \vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^{۲}}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{(-۱,-۳,۰)(۲,-۳,۶)}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)$$

۶

$$\vec{a}=(۲,۲,-۱)\rightarrow r\vec{b}-\vec{a}\overset{r=۲}{=\!=}۲\vec{b}-\vec{a}=(۶,۲,-۲)-(۲,۲,-۱)=(۴,۰,-۱)$$

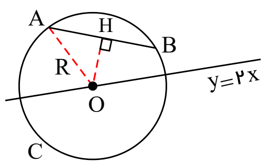
۷ برای یافتن تقاطع دو خط داریم:

$$\begin{cases}y=x-۲\\ y=۲x+۱\end{cases}\Rightarrow ۲x+۱=x-۲\Rightarrow x=-۳ \text{ و } y=-۵\Rightarrow \text{مرکز دایره}: O(-۳,-۵)$$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

$$\text{معادله دایره}: (x+۳)^{۲}+(y+۵)^{۲}=۹$$

۸ از آنجا که مرکز دایره روی خط $y=۲x$ قرار دارد، پس مختصات آن به‌صورت $O(\alpha,۲\alpha)$ می‌باشد. مطابق شکل داریم:



$$\text{معادله دایره}: (x-\alpha)^{۲}+(y-۲\alpha)^{۲}=R^{۲}$$

$$\begin{cases} A(1 \text{ و } -2) \in C \Rightarrow (1-\alpha)^2 + (-2-2\alpha)^2 = R^2 \\ B(3 \text{ و } 0) \in C \Rightarrow (3-\alpha)^2 + (0-2\alpha)^2 = R^2 \end{cases}$$

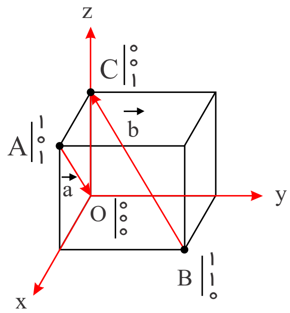
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4 + 4\alpha^2 + 8\alpha = R^2 \\ 9 + \alpha^2 - 6\alpha + 4\alpha^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha^2 + 6\alpha + 5 = R^2 \\ 5\alpha^2 - 6\alpha + 9 = R^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 + 6\alpha + 5 = 5\alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 12\alpha = 9 - 5 = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{(1)} R^2 = 5 \times \frac{1}{9} - 2 + 9 = \frac{5}{9} + 7 = \frac{68}{9} \text{ و } O(\alpha \text{ و } 2\alpha) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

معادلهٔ دایره: $(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{68}{9}$

۹ فرض می‌کنیم یال مکعب به طول یک واحد باشد.



$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{AO} = O - A = (-1, 0, -1) \\ \vec{b} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{1 + 0 - 1}{|a|\,|b|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

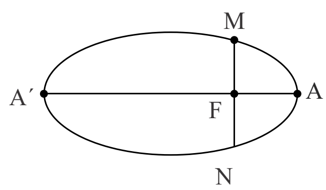
۱۰

$$|a| = 2 \ , \ |b| = \sqrt{2} \ , \ |a'| = ?$$

$$|2a + b|^2 = 12 a \cdot b \Rightarrow 4|a|^2 + |b|^2 + 4a \cdot b = 12 a \cdot b \Rightarrow 16 + 2 = 8 a \cdot b$$

$$\Rightarrow a \cdot b = \frac{9}{4} \Rightarrow |a| \underbrace{|b|}_{\sqrt{2}} \cos\theta = \frac{9}{4} \Rightarrow \underbrace{|a| \cos\theta}_{|a'|} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

۱۱



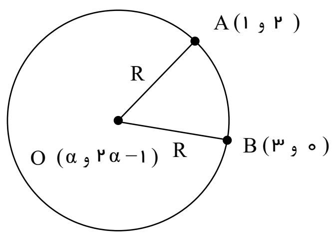
$$\left.\begin{matrix} \text{طول کوتاه‌ترین وتر کانونی } MN = \frac{2b^2}{a} \\ a^2 = b^2 + c^2 \to b^2 = a^2 - c^2 \end{matrix}\right\}$$

$$\to MN = \frac{2(a^2 - c^2)}{a} \times \frac{a}{a} = 2a \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$\to MN = 2a(1 - (\frac{c}{a})^2) \to MN = 2a(1 - e^2)$$

۱۲

قطر از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین مختصات مرکز به‌صورت $(\alpha, 2\alpha - 1)$ می‌باشد.



فاصلهٔ نقاط A و B از مرکز (O) با یکدیگر برابر بوده و مساوی اندازهٔ شعاع دایره است، بنابراین:

$$R = OA = OB \to \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2 - 2\alpha + 1)^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (0 - 2\alpha + 1)^2}$$

$$\to (1-\alpha)^2 + (3 - 2\alpha)^2 = (3-\alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2$$

$$\to \cancel{1} + \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + \cancel{9} + \cancel{4\alpha^2} - 12\alpha = \cancel{9} + \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + \cancel{1} + \cancel{4\alpha^2} - 4\alpha$$

$$\to 4\alpha = 0 \to \alpha = 0 \ , \ 2\alpha - 1 = -1 \to O(0, -1)$$

$$\to R = OA = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۲-(-۱))^۲} = \sqrt{۱۰}$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۰)^۲ + (y-(-۱))^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ \to x^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰$$

(۱۳)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = A^۲A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-۲)^۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳^۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴^۳ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $A^n = \begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$

(۱۴)

الف

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲ + (z_B - z_A)^۲} = \sqrt{(۳-۳)^۲ + (-۲-۱)^۲ + (۲-۲)^۲} = ۳$$

ب معادلهٔ مربوط به پاره‌خط AB برابر است با:

$$\begin{cases} x = ۳ \\ -۲ \le y \le ۱ \\ z = ۲ \end{cases}$$

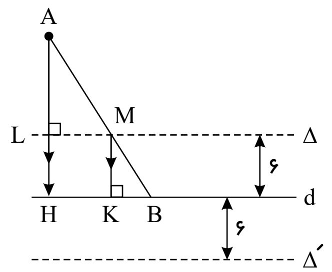
(۱۵)

$$\vec{AB} = (۱,۲,۱), \vec{AC} = (-۳,۲,-۳) \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (-۸,۰,۸) \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{۶۴+۰+۶۴} = ۸\sqrt{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = ۴\sqrt{۲}$$

(۱۶) yها

(۱۷) مطابق شکل فاصلهٔ نقطهٔ A از d برابر با $۱۲cm$ می‌باشد. وسط AH را نقطهٔ L در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AL = LH = \frac{۱۲}{۲} = ۶cm$$

برای پاره‌خط دلخواهی مثل AB هم داریم:

$$AB \text{ وسط } M \text{ و } MK || AH \Rightarrow \frac{MK}{AH} = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MK = \frac{AH}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶cm$$

پس همهٔ نقاطی مثل M، فاصله‌ای به اندازهٔ ثابت $۶cm$ از d دارند. بنابراین مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی مثل AB، دو خط Δ و Δ' موازی با d و به فاصلهٔ $۶cm$ از آن می‌باشد. (برای خط Δ' یادمان باشد که نقطهٔ A را پایین خط d در نظر می‌گیریم.)

(۱۸)

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^۲ = I \Rightarrow A^۳ = A \times A^۲ = AI = A \Rightarrow A^۴ = A^۳A = A \times A = A^۲ = I \Rightarrow A^۷ - A^۴$$

$$= A^۴(A^۳ - I) = I(A - I) = A - I = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

(۱۹)

الف نادرست

ب درست

پ درست

ت نادرست

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۴y + ۴) = -۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = -۵ \quad (\text{غیرممکن})$$

۲۰

الف

$y^{۲} - ۲y + ۱ = -۸x - ۹ + ۱ \rightarrow (y-۱)^{۲} = -۸(x+۱) \rightarrow A = (-۱\ ,\ ۱)\ ,\ a = ۲$

$F(-۳\ ,\ ۱)\ ,\ x = ۱$

ب