نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه تحلیلی ( تستی)

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) $(۴,۳)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

۲) اگر $A(-۱,۲)$، $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه راس مثلث $ABC$ باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد برضلع $BC$ از راس $A$ کدام است؟

۱) $y = -x - ۳$ ۲) $y = -x + ۱$ ۳) $y = -۲x$ ۴) $y = x + ۳$

۳) دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(۱,۷)$ و $C(-۴,۱۹)$ هستند. در صورتی که زاویهٔ بین دو قطر مستطیل $۳۰^\circ$ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۱۶۹}{۴}$ ۲) $۱۶۹$ ۳) $\frac{۱۶۹\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۱۶۹}{۲}$

۴) دسته خطوط $(m+۱)x + (۲m-۱)y + ۲m + ۵ = ۰$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۵}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

۵) دو خط $(۲a+۱)x + ۲y = ۲a + ۳$ و $۳x + (۲a+۶)y = ۲$ که هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند، چه‌قدر از هم فاصله دارند؟

۱) $\frac{۵}{۳\sqrt{۷}}$ ۲) $\frac{۳}{۵\sqrt{۷}}$ ۳) $\frac{۷}{۳\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۷}{۵\sqrt{۳}}$

۶) در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB = AC)$ به رئوس $B\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-۳\\۲\end{matrix}\right.$ و مساحت ۴ واحد مربع، مجموع طول و عرض نقطهٔ $A$ کدام گزینه می تواند باشد؟

۱) $۷$ ۲) $-۵$ ۳) $-۳$ ۴) $-۱$

۷) نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x - y = ۵$ در نظر بگیرید مثلث متساوی‌الاضلاع $ABC$ را با ارتفاع $AH$ می‌سازیم به‌طوری که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس $A$ کدام است؟

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۶})$

۸) نقاط $A(۲,۳)$، $B(۴,۱)$ و $C(۸,۲)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند، طول قطر $BD$ کدام است؟

۱) $۵$ ۲) $۴$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۹) دایره‌ای به مرکز $(۲,۱)$، بر دو خط به معادلات $۳x + ۴y = ۵$ و $۱۲y - ۵x = a$ مماس است. دو مقدار ممکن برای $a$ کدام است؟

۱) $۱۱$ و $-۱۵$ ۲) $۳$ و $۱$ ۳) $-۱۱$ و $۱۵$ ۴) $-۳$ و $-۱$

۱۰) نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۱\\-۵\end{matrix}\right.$ روی محیط یک دایره واقع هستند. معادلهٔ قطری از دایره که بر پاره‌خط $AB$ عمود است، برابر کدام گزینه است؟

۱) $۱۶y + ۶x = -۱۳$ ۲) $۸y + ۳x = -۲$ ۳) $۱۶y + ۶x = -۵$ ۴) $۸y + ۳x = -۵$

۱۱) نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(-۳,۲)$ دو رأس مثلثی و $C$ رأس سوم روی خط $۳x-y=۱$ است، اگر مساحت مثلث ۴ باشد، حاصل $۹x_C+۳y_C$ کدام دو عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۱ و $-۷$ ۲) ۱۱ و $-۵$ ۳) ۱۳ و $-۵$ ۴) ۱۳ و $-۷$

۱۲) نقاط $A(-۱,-۶)$، $B(-۳,-۳)$ و $C(-۴,-۸)$ رئوس چه نوع مثلثی هستند؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط قائم‌الزاویه ۳) فقط متساوی‌الساقین ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۱۳) اگر ۳ نقطهٔ $A(۳,-۵)$، $B(۲-a,۳)$ و $C(۲a+۳,۲)$ روی یک خط راست واقع باشند، مقدار $a$ کدام است؟

۱) $\frac{-۷}{۲۳}$ ۲) $-\frac{۳۲}{۷}$ ۳) $-\frac{۲۲}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۲۲}$

۱۴) مساحت محدود به نمودار تابع $y=|x|$ و $x+۳y=۱۲$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۵) سه نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۴,۳)$ سه رأس مثلث هستند، مختصات نقطهٔ برخورد ارتفاعات کدام است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(۳,۲)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۶,۱)$

۱۶) نقاط $A(-۱,۴)$ و $B(۵,-۳)$ دو رأس مثلث $ABC$ هستند، اگر $G(۲,-۱)$ محل تلاقی میانه‌های مثلث باشد، مجموع طول و عرض نقطه‌ی $C$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-۲$ ۳) ۶ ۴) $-۶$

۱۷) اگر طول از مبدأ خط $(۳a+b)x+۳y=۳b+۵$ برابر ۳ باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۸) چند نقطه روی خط $۳x+۴y+۴=۰$ یافت می‌شود که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(۱,۲)$ برابر ۲ باشد؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) هیچ نقطه

۱۹) مبدأ مختصات به کدام یک از خطوط زیر نزدیک‌تر است؟

۱) $y=-x+۲$ ۲) $۴x=۳$ ۳) $۷y=۳$ ۴) $x+y=۱$

۲۰) اگر نقاط $A$ و $B$ روی محور $x$ها به‌صورت $x_A=-۵$ و $x_B=۷$ اختیار شود، طول نقطهٔ $M$ کدام باشد تا رابطهٔ $\overline{MA}=-۳\overline{MB}$ برقرار باشد؟

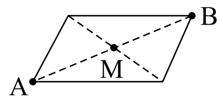
۱) $-۴$ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) $-۸$

هندسه تحلیلی (تستی)

# پاسخنامه تشریحی

**۱** (۱) (۲) **(۳)** (۴)

مختصات نقطهٔ $A$ در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطهٔ $A$ روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطهٔ $B$ به دست آید.

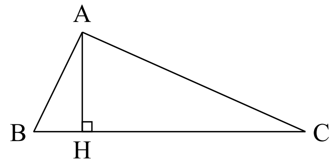



$$\begin{matrix}۳\\-۲\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=۱۱\\ ۳y+۴x=۸\end{cases}\to -۱۷x=۱۷\Rightarrow x=-۱\,,\ y=۴\Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\ ۴\end{matrix}\right.$$

می‌دانیم نقطه‌ی $M$ وسط پاره‌خط $AB$ قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

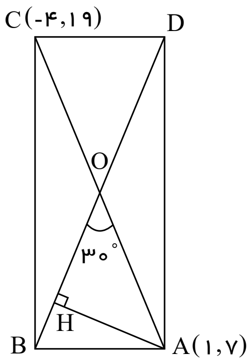
**۲** (۱) **(۲)** (۳) (۴) شکل فرضی روبرو را در نظر بگیرید، در ابتدا شیب ضلع $BC$ را به دست می آوریم و چون ارتفاع، بر ضلع $BC$ عمود است پس شیبش عکس و قرینه ی شیب ضلع $BC$ است.




$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۰+۲}{۳-۱}=۱\xrightarrow{AH\perp BC}m_{AH}=-۱$$

$AH$ معادله‌ی ارتفاع: $y-۲=-۱(x+۱)\to y=-x+۱$

**۳** **(۱)** (۲) (۳) (۴) ابتدا طول قطر $AC$ را به‌دست می‌آوریم:




$$\to AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۱-(-۴))^۲+(۷-۱۹)^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۹}\to AC=۱۳$$

و چون در مستطیل قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند داریم:

$$OA=OC=OB=OD=\frac{۱۳}{۲}$$

قطرهای مستطیل، مستطیل را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می‌کنند پس داریم:

$$S_{ABCD}=۴S_{OAB}\to S_{ABCD}=۴(\frac{۱}{۲}\times OA\times OB\times\sin ۳۰^\circ)=۴(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱۶۹}{۴}$$

توجه کنید مساحت هر مثلث را می‌توان از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها به‌دست آورد.

**۴** (۱) (۲) **(۳)** (۴) برای پیدا کردن نقطهٔ ثابت دسته خطوط کافی است به $m$ دو مقدار مختلف داده و با دو خط به‌دست آمده تشکیل دستگاه دهیم و $y, x$ را پیدا کنیم.

$$\left.\begin{matrix}m=-۱\to -۳y-۲+۵=۰\to y=۱\\ m=\frac{۱}{۲}\to\frac{۳}{۲}x+۱+۵=۰\to x=-۴\end{matrix}\right\}\to A\left|\begin{matrix}-۴\\ ۱\end{matrix}\right.\ \text{نقطهٔ ثابت}$$

$$A\left|\begin{matrix}-۴\\ ۱\end{matrix}\right.\ ,\ O\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.\to AO=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}$$

**۵** (۱) (۲) **(۳)** (۴) چون دو خط هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند بنابراین موازی و غیر منطبق هستند.

شرط موازی بودن: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\to\underbrace{\frac{۲a+۱}{۳}=\frac{۲}{۲a+۶}}\neq\frac{۲a+۳}{۲}\quad *$

$$(۲a+۱)(۲a+۶)=۶ \to ۴a^۲+۱۲a+۲a+۶=۶ \to ۴a^۲+۱۴a=۰ \to ۲a(۲a+۷)=۰$$

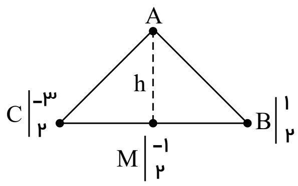
$$\to \begin{cases} a=۰ \xrightarrow{*} \frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}\neq\frac{۳}{۲} \to \text{شرط برقرار است} \\ a=\frac{-۷}{۲} \xrightarrow{*} \frac{-۶}{۳}=\frac{۲}{-۱}=\frac{-۴}{۲} \to \text{شرط برقرار نیست. (دو خط منطبق هستند)} \end{cases}$$

پس $a=۰$ قابل قبول است و معادلات دو خط به صورت $\begin{cases}۳x+۶y=۲\\ x+۲y=۳\end{cases}$ یا به صورت ساده‌تر $\begin{cases}۳x+۶y-۲=۰\\ ۳x+۶y-۹=۰\end{cases}$ در می آیند.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۲-(-۹)|}{\sqrt{۹+۳۶}}=\frac{۷}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۷}{۳\sqrt{۵}}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ کمک می‌گیریم.

۶) ۱ ۲ ۳ **۴**




شکل فرضی فوق را درنظر بگیرید. با توجه به هم‌عرض بودن نقاط $B$ و $C$، مختصات نقطهٔ $M$ وسط پاره‌خط $BC$ به‌صورت $\left|\begin{matrix}\frac{-۳+۱}{۲}\\ ۲\end{matrix}\right.$ است. از آن‌جا که مثلث متساوی‌الساقین است، قطعاً نقطهٔ $A$ در راستای عمودی نقطهٔ $M$ و به فاصلهٔ $h$ (ارتفاع مثلث) از آن خواهد بود. یعنی:

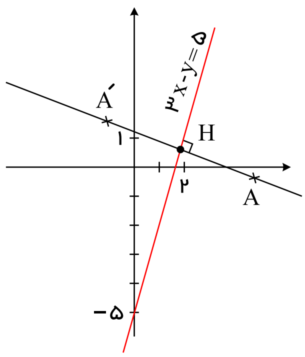
$A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲-h\end{matrix}\right.$ یا $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲+h\end{matrix}\right.$

حال دقت کنید که مساحت مثلث ۴ واحد مربع و طول قاعدهٔ آن $(BC)$ هم ۴ واحد است. پس:

$$S=\frac{۴\times h}{۲}\xrightarrow{S=۴} h=۲$$

لذا مختصات نقطهٔ $A$ به‌صورت $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۴\end{matrix}\right.$ یا $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right.$ است. یعنی مجموع طول و عرض نقطهٔ $A$ برابر با $۳=-۱+۴$ یا $-۱=-۱+۰$ است.

۷) ۱ **۲** ۳ ۴




محیط مثلث مدنظر $۳\sqrt{۳۰}=\sqrt{۲۷۰}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{۳۰}$ خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ضلع است یعنی: $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}=\sqrt{۳۰}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=AH$.

پس باید فاصلهٔ $A$ تا $H$ برابر با $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$ باشد. دقت کنید $A$ روی خط عمود بر $۳x-y=۵$ است.

$$\Rightarrow y=۳x-۵ \Rightarrow m=۳ \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m'=-\frac{۱}{۳}$$

معادلهٔ خط گذرنده از $A$ و $H$ را می‌یابیم مختصات $H(۲,۱)$ و $m'=-\frac{۱}{۳}$ را داریم.

$$y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۲)\Rightarrow ۳y+x=۵$$

پس $A$ روی خط $۳y+x=۵$ است که می‌توان مختصات $A$ را به‌صورت پارامتری $(\alpha,\frac{۵-\alpha}{۳})$ در نظر گرفت $AH$ را برابر با $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow |AH| \Rightarrow (\alpha-۲)^۲+(\underbrace{\frac{۵-\alpha}{۳}-۱}_{(\frac{۲-\alpha}{۳})})^۲=\frac{۹۰}{۴} \Rightarrow (\alpha-۲)^۲(۱+\frac{۱}{۹})=\frac{۹۰}{۴}$$

$$\Rightarrow (\alpha-۲)^۲=\frac{۸۱}{۴} \Rightarrow \alpha-۲=\pm\frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{۱۳}{۲} \Rightarrow A(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲}) \\ \alpha=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow \text{در گزینه ها نیست.} \end{cases}$$

**۸** (۱) (۲) (۳) **(۴)** در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگر هستند و داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \to ۲+۸=۴+x_D \to x_D=۶ \\ y_A+y_C=y_B+y_D \to ۳+۲=۱+y_D \to y_D=۴ \end{cases} \to D(۶,۴)$$

$$\to BD \text{ طول قطر} = \sqrt{(۶-۴)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

**۹** (۱) (۲) **(۳)** (۴) چون دایره بر دو خط مماس است، پس فاصلهٔ مرکز دایره با دو خط، مساوی و برابر شعاع دایره است:

$$O(۲,۱)\ ,\ ۳x+۴y-۵=۰\ ,\ -۵x+۱۲y-a=۰$$

$$d_۱=\frac{|۳(۲)+۴(۱)-۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

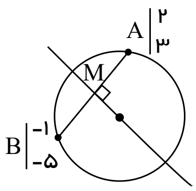
$$d_۲=\frac{|-۵(۲)+۱۲(۱)-a|}{\sqrt{(-۵)^۲+۱۲^۲}}=\frac{|۲-a|}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{|۲-a|}{۱۳}$$

$$d_۱=d_۲ \to \frac{|۲-a|}{۱۳}=۱ \to |۲-a|=۱۳ \to \begin{cases} ۲-a=۱۳ \to ۲-۱۳=a \to a=-۱۱ \\ ۲-a=-۱۳ \to ۲+۱۳=a \to a=۱۵ \end{cases}$$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

**۱۰** **(۱)** (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل، قطری از دایره که بر پاره‌خط $AB$ عمود است همان عمودمنصف پاره‌خط $AB$ می‌شود.

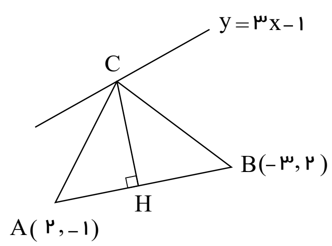



$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۳+۵}{۲+۱}=\frac{۸}{۳} \longrightarrow \text{شیب قطر دایره}=-\frac{۳}{۸}$$

$$AB \text{ وسط پاره‌خط } M\left|\begin{array}{c}\frac{x_A+x_B}{۲}\\ \frac{y_A+y_B}{۲}\end{array}\right. \longrightarrow M\left|\begin{array}{c}\frac{۲-۱}{۲}\\ \frac{۳-۵}{۲}\end{array}\right. \longrightarrow M\left|\begin{array}{c}\frac{۱}{۲}\\ -۱\end{array}\right.$$

$$\text{معادلهٔ قطر}: y+۱=-\frac{۳}{۸}(x-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\times ۱۶} ۱۶y+۱۶=-۶x+۳ \longrightarrow ۱۶y+۶x=-۱۳$$

**۱۱** (۱) **(۲)** (۳) (۴) نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر با $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.




$$AB=\sqrt{۲۵+۹}=\sqrt{۳۴}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}CH\cdot AB \Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}CH\times\sqrt{۳۴}$$

$$\Rightarrow CH=\frac{۸}{\sqrt{۳۴}}\ ,\ m_{AB}=\frac{۲+۱}{-۳-۲}=-\frac{۳}{۵}\ ,\ y+۱=-\frac{۳}{۵}(x-۲)$$

$$\Rightarrow ۵y+۵=-۳x+۶ \to ۳x+۵y-۱=۰ \to AB \text{ معادلهٔ ضلع}$$

$AB$ فاصله $C$ تا خط $= CH \ , \ C(\alpha, ۳\alpha - ۱) \Rightarrow \dfrac{|۳\alpha + ۵(۳\alpha - ۱) - ۱|}{\sqrt{۹ + ۲۵}} = \dfrac{۸}{\sqrt{۳۴}}$

$$\Rightarrow |۱۸\alpha - ۶| = ۸ \Rightarrow ۱۸\alpha - ۶ = \pm ۸ \rightarrow \alpha = \frac{۷}{۹} \ , \ \alpha = -\frac{۱}{۹}$$

$$۹x_C + ۳y_C = ۹\alpha + ۳(۳\alpha - ۱) = ۱۸\alpha - ۳ \ , \ \alpha = \frac{۷}{۹} \rightarrow ۱۸(\frac{۷}{۹}) - ۳ = ۱۱$$

$$\alpha = -\frac{۱}{۹} \rightarrow ۱۸(-\frac{۱}{۹}) - ۳ = -۵$$

**۱۲** (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا فاصلهٔ میان دوبه‌دوی این نقاط را مشخص می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳} \ , \ AC = \sqrt{۹ + ۴} = \sqrt{۱۳} \ , \ BC = \sqrt{۱ + ۲۵} = \sqrt{۲۶}$$

$AB = AC \ , \ AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \rightarrow ۱۳ + ۱۳ = ۲۶ \rightarrow$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

**۱۳** **(۱)** (۲) (۳) (۴) زمانی که ۳ نقطه روی یک خط واقع هستند شیب میان دوبه‌دوی آنها با یکدیگر برابر است:

$$m_{AB} = \frac{۳ + ۵}{۲ - a - ۳} = \frac{۸}{-a - ۱} = -\frac{۸}{a + ۱}$$

$$m_{AC} = \frac{۲ + ۵}{۲a + ۳ - ۳} = \frac{۷}{۲a} \Rightarrow -\frac{۸}{a + ۱} = \frac{۷}{۲a} \Rightarrow ۱۶a = -۷a - ۷ \Rightarrow ۲۳a = -۷ \Rightarrow a = -\frac{۷}{۲۳}$$

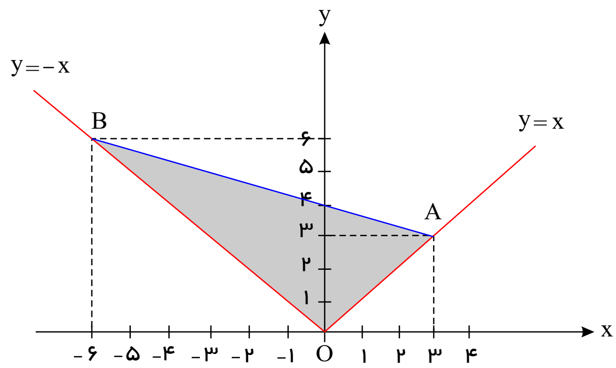
**۱۴** (۱) (۲) (۳) **(۴)** محل برخورد $x + ۳y = ۱۲$ با هرکدام از خطوط $y = x$ و $y = -x$ را می‌یابیم.

$$x + ۳y = ۱۲ \xrightarrow{y=x} ۴x = ۱۲ \rightarrow x = ۳$$

$$\Rightarrow A(۳, ۳)$$

$$x + ۳y = ۱۲ \xrightarrow{y=-x} -۲x = ۱۲ \rightarrow x = -۶$$

$$B(-۶, ۶)$$



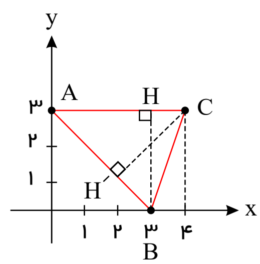

$$OA = \sqrt{۹ + ۹} = ۳\sqrt{۲} \ , \ OB = \sqrt{۳۶ + ۳۶} = ۶\sqrt{۲}$$

$$S = \frac{۱}{۲} OA \cdot OB = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۲} = ۱۸$$

**۱۵** (۱) **(۲)** (۳) (۴) باید معادلهٔ دو تا از ارتفاع‌ها را یافته و با هم قطع بدهیم ولی در این سؤال رسم شکل مثلث بسیار کمک می‌کند.

$$BH : x = ۳ \ , \ m_{AB} = \frac{۰ - ۳}{۳ - ۰} = -۱ \rightarrow m_{CH'} = ۱$$

$C(۴, ۳) \rightarrow y - ۳ = ۱(x - ۴) \rightarrow y = x - ۱ \rightarrow CH'$ معادله




$\begin{cases} x = ۳ \\ y = x - ۱ \end{cases} \rightarrow y = ۳ - ۱ = ۲ \rightarrow (۳, ۲) \rightarrow$ نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌ها

**۱۶** (۱) **(۲)** (۳) (۴) برای تعیین مختصات محل تلاقی میانه‌های یک مثلث کافی است میانگین طول و عرض مختصات رئوس را تعیین کنیم:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} \Rightarrow \frac{-۱ + ۵ + x_C}{۳} = ۲ \Rightarrow x_C = ۲$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳} \Rightarrow \frac{۴ - ۳ + y_C}{۳} = -۱ \Rightarrow y_C = -۴$$

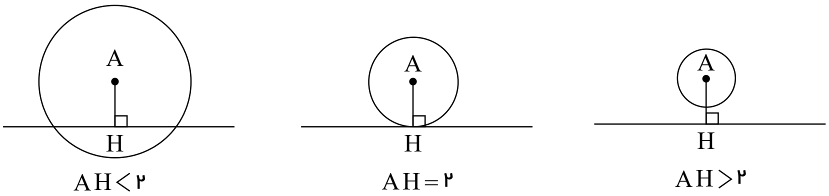
$$C = (۲, -۴) \rightarrow ۲ - ۴ = -۲$$

**۱۷** (۱) **(۲)** (۳) (۴) برای تعیین طول از مبدأ یک خط باید به‌جای $y$، مقدار صفر را قرار دهیم:

$$y = ۰ \ , \ x = ۳ \Rightarrow ۳(۳a + b) + ۰ = ۳b + ۵ \Rightarrow ۹a + ۳b = ۳b + ۵ \Rightarrow a = \frac{۵}{۹}$$

**۱۸** ۱ ۲ ۳ **۴** نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ , y_\circ)$ از خط $ax+by+c=\circ$ برابر با $\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.

باید دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع ۲ رسم کنیم و وضعیت این دایره با خط داده‌شده را بررسی کنیم. برای این کار باید فاصلهٔ $A$ تا خط را بیابیم و با ۲ مقایسه کنیم.




$$AH=\frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳>۲\Rightarrow \text{هیچ نقطه‌ای}$$

**۱۹** ۱ ۲ **۳** ۴ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ , y_\circ)$ از خط $ax+by+c=\circ$ برابر است با: $d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

فاصلهٔ مبدأ از هرکدام از خطوط را می‌یابیم:

$$y=-x+۲\Rightarrow x+y-۲=\circ \rightarrow \frac{|\circ+\circ-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$x-\frac{۳}{۴}=\circ\Rightarrow\frac{\left|\circ-\frac{۳}{۴}\right|}{\sqrt{۱+\circ}}=\frac{۳}{۴}\quad , \quad y-\frac{۳}{۷}=\circ\Rightarrow\frac{\left|\circ-\frac{۳}{۷}\right|}{\sqrt{۱+\circ}}=\frac{۳}{۷}$$

$$x+y-۱=\circ\Rightarrow\frac{|\circ+\circ-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}>\frac{۳}{۴}>\frac{\sqrt{۲}}{۲}>\frac{۳}{۷}$$

**۲۰** ۱ **۲** ۳ ۴ برای محاسبهٔ طول یک پاره‌خط افقی به‌صورت $AB$، باید از رابطهٔ $x_B-x_A$ استفاده کنیم:

$$\overline{MA}=-۳\overline{MB}\Rightarrow x_A-x_M=-۳(x_B-x_M)$$

$$\Rightarrow -۵-x_M=-۳(۷-x_M)=-۲۱+۳x_M\Rightarrow ۲۱-۵=۳x_M+x_M$$

$$\Rightarrow ۴x_M=۱۶\rightarrow x_M=۴$$

# پاسخ‌نامه کلیدی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۲ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۳ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | **۴** |
| ۷ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | **۴** |
| ۹ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۱۰ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | **۴** |
| ۱۳ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | **۴** |
| ۱۵ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | **۴** |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |