

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



نام آزمون: هندسه یازدهم فصل اول تستی

تاریخ آزمون:

۱ مساحت ناحیه شامل نقاطی از صفحه که طول مماس رسم شده از آنها بر دایره $C(O, 8)$ کمتر از $\sqrt{34}$ باشد کدام است؟

۲۴π (۴)

۵۴π (۳)

۳۴π (۲)

۹۸π (۱)

۲ دو قطر AB و CD از دایره $C(O, 22/5)$ برهم عمودند. اگر G محل هم‌رسی میانه‌های مثلث ACD باشد و امتداد GD دایره را در نقطه E قطع کند. اندازه GE کدام است؟

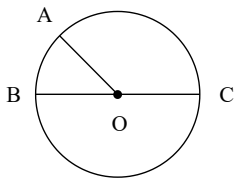
$6\sqrt{10}$ (۴)

$4\sqrt{10}$ (۳)

$6\sqrt{3}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۳ در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر طول کمان AB و مساحت قطاع AOB به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ و π باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۳ (۲)

۱٫۵ (۱)

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۴ در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۸ و ۱۰ واحد، دایره محاطی خارجی نظیر ضلع متوسط، این ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت دو قطعه حاصل کدام است؟

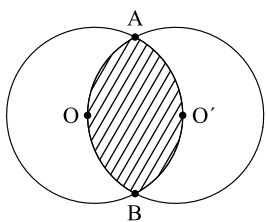
$\frac{1}{7}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

۵ در شکل مقابل دو دایره به شعاع‌های ۲ از مرکز یکدیگر گذشته‌اند. مساحت ناحیه مشترک آنها کدام است؟



$4\pi - 6$ (۲)

$\frac{8\pi}{3} - 6$ (۱)

$4\pi - 2\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ (۳)

۶ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، خط گذرا بر رأس A قاعده BC و دایره محیطی مثلث را در D و E قطع می‌کند. اندازه $AD \cdot AE$ برابر کدام است؟

BC^2 (۴)

AC^2 (۳)

$CD \cdot CB$ (۲)

$BD \cdot BC$ (۱)

۷ کدام یک از چهارضلعی‌های زیر همواره محیطی است؟

دوزنقه متساوی الساقین (۴)

لوزی (۳)

مستطیل (۲)

متوازی‌الاضلاع (۱)

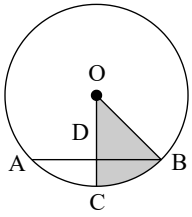
۸ دو دایره $C_1(O_1, 4)$ و $C_2(O_2, 3)$ مماس داخل هستند. قطر AB در دایره C_1 از نقطه O_2 می‌گذرد. اگر وتر AC از دایره C_1 در نقطه D بر دایره C_2 مماس باشد، طول وتر AC کدام است؟

$6,4$ (۴)

$4,8$ (۳)

$9,6$ (۲)

$7,2$ (۱)



۹ در شکل زیر، O مرکز دایره، $\widehat{ABO} = 45^\circ$ و $AD = BD = 4$ است. مساحت ناحیه هاشور خورده چقدر است؟

۴π (۲)

۲π (۱)

۸π (۴)

۶π (۳)

۱۰ مساحت دایره محاطی خارجی یک مثلث متساوی الاضلاع برابر 27π است. اندازه محیط این مثلث کدام است؟

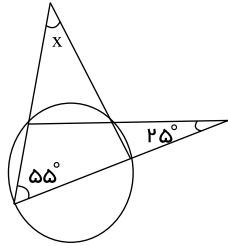
۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

۱۱ در دایره روبه رو مقدار x کدام است؟



۴۵° (۲)

۵۵° (۱)

۳۰° (۴)

۴۰° (۳)

۱۲ نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن را به هم وصل می کنیم. اگر کوچک ترین زاویه مثلث حاصل، 40° درجه باشد، اندازه بزرگ ترین زاویه مثلث ABC کدام است؟

۹۰° (۴)

۱۰۰° (۳)

۱۱۰° (۲)

۱۲۰° (۱)

۱۳ در یک دایره به مرکز O ، دو قطر AB و CD بر همدیگر عمودند. از نقطه M واقع بر کمان AC ، مماسی بر دایره رسم کرده تا امتداد AB را در P و امتداد CD را در نقطه Q قطع کند. اگر $\widehat{QPA} = 70^\circ$ ، اندازه زاویه QMB کدام است؟

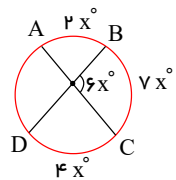
۸۰° (۴)

۷۰° (۳)

۶۰° (۲)

۵۰° (۱)

۱۴ در دایره مقابل، اندازه کمان \widehat{AD} کدام است؟



۱۲۰° (۲)

۹۰° (۱)

۸۰° (۴)

۱۰۰° (۳)

۱۵ دو دایره C_1 و C_2 به شعاع ۵ مماس خارج هستند. چند خط می توان رسم کرد که بر دایره C_1 مماس باشد و در دایره C_2 وترى به طول ۶ جدا کند؟

بی شمار (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

۱۶ طول خط المکزین دو دایره که نسبت به هم مماس درونی اند، ۴ و مساحت ناحیه محدود بین آنها 32π است. طول شعاع دایره کوچک تر کدام است؟

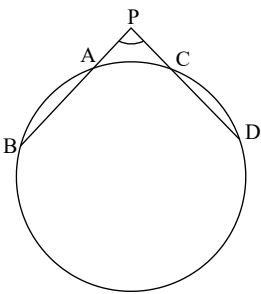
۱ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

۱۷ در شکل زیر، امتداد وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطه P قطع کرده اند به طوری که $\widehat{P} = 120^\circ$. اگر $PA = PC = \frac{1}{4}CD = \sqrt{3}$ باشد، طول پاره خط BD کدام است؟



۶ (۲)

۳ (۱)

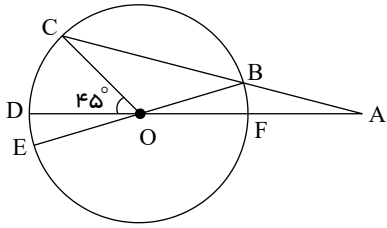
۱۲ (۴)

۹ (۳)

هفدهم: باز هم فصل اول نستی

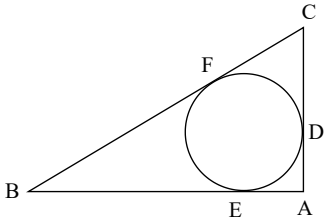


۱۸ در شکل زیر، امتدادهای BC و DF همدیگر را در نقطه A قطع کرده‌اند. اگر طول AB برابر نصف قطر دایره باشد، کمان CE چند درجه است؟ (O مرکز دایره و BE قطر دایره است.)



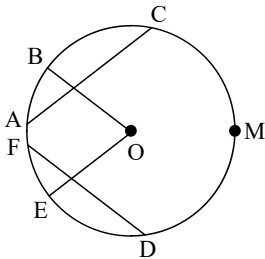
- ۱) ۳۰
- ۲) ۴۵
- ۳) ۶۰
- ۴) ۷۵

۱۹ مطابق شکل داریم: $AD = 3$ و $BE = 5$ و محیط مثلث برابر ۲۴ است. طول AC کدام است؟



- ۱) ۷
- ۲) ۷٫۵
- ۳) ۶
- ۴) ۵٫۵

۲۰ در شکل زیر O مرکز دایره، $EO \parallel AC$ و $BO \parallel FD$ است. اگر $\widehat{CMD} = 100^\circ$ و $\widehat{AF} = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه BOE کدام است؟

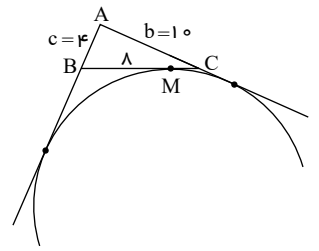


- ۱) 30°
- ۲) 40°
- ۳) 50°
- ۴) 60°



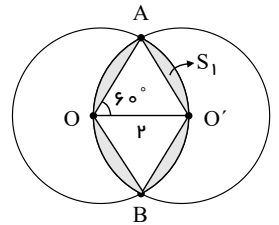
$$P = \frac{4 + 8 + 10}{2} = 11$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{P-b}{P-c} = \frac{11-10}{11-4} = \frac{1}{7}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵ مطابق شکل دو مثلث BOO' و AOO' متساوی الاضلاعند. داریم:

$$S_{\Delta AOO'} = S_{\Delta BOO'} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$



مساحت هر یک از ۴ قطعه هاشورخورده شکل برابر است با:

$$S_1 = S_{\widehat{AOO'}} - S_{\Delta AOO'} = \frac{60}{360} \times \pi \times 2^2 - \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$$

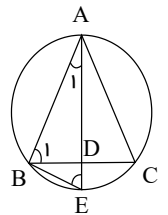
$$\text{مساحت بین دو دایره} = 2S_{\Delta AOO'} + 4 \times S_1 = 2 \times \sqrt{3} + 4 \times \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

برای زاویه محاطی \widehat{AEB} داریم:

$$\widehat{AEB} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{B_1} = \widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{B_1}$$



دو مثلث ABE و ABD باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{B_1} \\ \widehat{A_1} \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$$

$$\Rightarrow AD \cdot AE = AB^2 = AC^2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ می‌دانیم که چهارضلعی محیطی است که مجموع اضلاع روبه‌رویش برابر باشند و بالعکس.

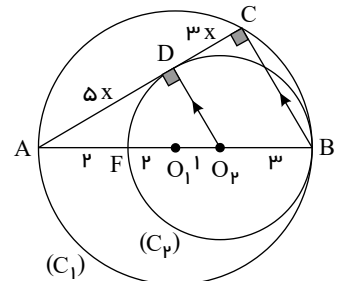
در بین گزینه‌ها تنها لوزی این ویژگی را همواره دارا می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\Delta ABC : O_1 D \parallel BC \rightarrow \frac{AO_1}{AB} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{5}{8} \rightarrow AD = 5x, AC = 8x, DC = 3x$$

$$(C_1) \text{ رابطه طولی در دایره} : AD^2 = AF \times AB \rightarrow (5x)^2 = 2 \times 8 \rightarrow 5x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$AC = 8x = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = 6,4$$

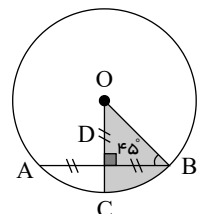


۱ ۲ ۳ ۴ ۹ قطر منصف وتر بر آن عمود است.

$$\left. \begin{aligned} AD = DB \rightarrow \widehat{O_1DB} = 90^\circ \\ \text{فرض} : \widehat{ABO} = 45^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{COB} = 45^\circ$$

$$\Delta BOD : OB = \sqrt{2}BD = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$

$$S_{\text{قطاع } COB} = \frac{45}{360} \times \pi \times (4\sqrt{2})^2 = 4\pi$$



$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}-a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

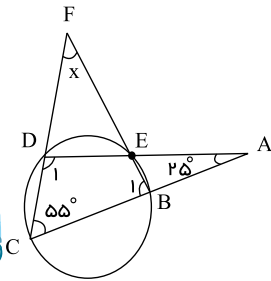
$$S = \pi r_a^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}\pi a^2 = 27\pi \rightarrow a = 6$$

محیط: $3a = 3 \times 6 = 18$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BED}}{2} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{BED} = 110^\circ, \widehat{BCD} = 25^\circ$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2} = 25^\circ \\ \hat{F} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} = x \end{cases} \Rightarrow (\widehat{CD} + \widehat{BC}) - (\widehat{BE} + \widehat{DE}) = 50^\circ + 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 140^\circ - 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$



در نتیجه محیط برابر است با:

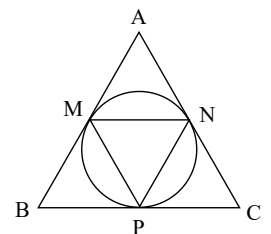
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱ برای زاویهٔ محاطی \hat{C} داریم:

همچنین برای زوایای \hat{A} , \hat{F} داریم:

مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} = \frac{\widehat{MNP} - \widehat{PM}}{2} \Rightarrow \widehat{MNP} - \widehat{PM} = 2\hat{B} \\ \widehat{MNP} + \widehat{PM} = 36^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MNP} = 18^\circ + \hat{B} \\ \widehat{PM} = 18^\circ - \hat{B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{N} = \frac{\widehat{PM}}{2} = \frac{18^\circ - \hat{B}}{2} = 9^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$



به همین ترتیب:

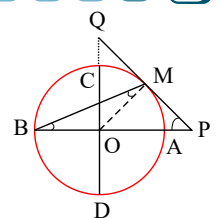
$$\begin{cases} \hat{P} = 9^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \\ \hat{M} = 9^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \end{cases}$$

$$\hat{N} = 40^\circ = 9^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 100^\circ$$

کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث MNP متناظر با بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC است، در نتیجه:

می‌دانیم شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس داریم:

$$\triangle OMP: \hat{P} = 70^\circ \rightarrow \widehat{MOP} = 20^\circ$$



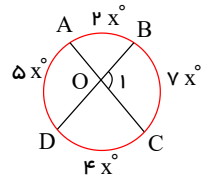
از طرفی زاویهٔ MOP ، زاویه‌ی خارجی برای مثلث OMB است، همچنین $OM = OB = R$ ، بنابراین:



$$O\hat{M}B = O\hat{B}M = \frac{M\hat{O}P}{2} = 10^\circ \Rightarrow Q\hat{M}B = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

مطابق شکل داریم:



مجموع کمان‌های دایره برابر ۳۶۰ درجه است، پس:

$$\hat{O}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 6x^\circ = \frac{\widehat{AD} + 7x^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 5x^\circ$$

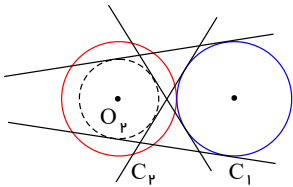
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 18x^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 100^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵ در دایره C_2 بی‌شمار وتر به طول ۶ می‌توان رسم کرد.

تمام این وترها بر دایره به مرکز O_2 و شعاع ۴ $\sqrt{5^2 - (\frac{6}{2})^2} = 4$ مماس هستند.

این دایره نسبت به دایره C_1 متخارج بوده و دارای چهار مماس مشترک با C_1 هستند. این چهار مماس مشترک جواب‌های مطلوب هستند.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\text{طول خط‌المركزين} = r - r' = 4 \quad (1)$$

$$\text{مساحت ناحیه بین دو دایره} = \pi(r^2 - r'^2) = 32\pi \Rightarrow \pi \underbrace{(r - r')}_4 (r + r') = 32\pi$$

$$\Rightarrow r + r' = 8 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow r = 6 \text{ و } r' = 2$$

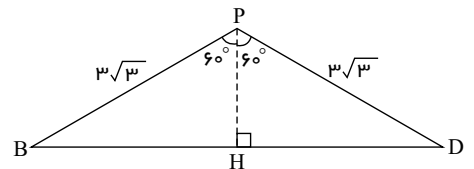
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

طبق روابط طولی: $PA \times PB = PC \times PD$, $PA = PC \Rightarrow PB = PD$

$$\Rightarrow PD = PC + CD = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} = PB$$

$$\triangle PDH : DH = \sin 60^\circ \times PD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow BD = 2DH = 9$$

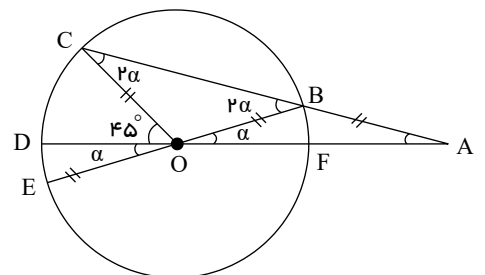


۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$AB = OB \Rightarrow B\hat{A}O = B\hat{O}A = \alpha \Rightarrow O\hat{B}C = 2\alpha$$

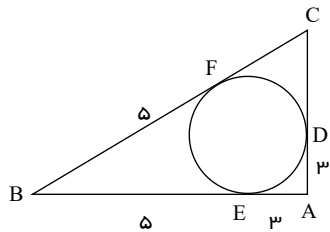
$$OC = OB \Rightarrow O\hat{C}B = O\hat{B}C = 2\alpha$$

$$45^\circ = \alpha + 2\alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$



$$\widehat{CD} = 45^\circ, \widehat{DE} = \alpha = 15^\circ \Rightarrow \widehat{CE} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

مطابق شکل، از رأس A دو مماس بر دایره رسم شده پس طول این دو مماس برابرند: $AD = AE = 3$



به همین ترتیب مماس‌های BE و BF مساوی هستند: $BE = BF = 5$
از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ محیط} &= AC + AB + BC = 24 \\ \Rightarrow 3 + CD + 8 + 5 + FC &= 24 \end{aligned}$$

$$2CD = 2FC = 8 \Rightarrow CD = FC = 4$$

می‌دانیم که $CD = CF$ پس داریم:

پس طول AC برابر است با: 7

با فرض $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{FE} = y$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$FD \parallel BE \rightarrow \widehat{FAB} = \widehat{DE} \rightarrow \widehat{DE} = 20^\circ + x$$

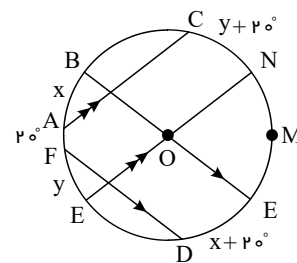
$$AC \parallel EN \rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{CN} \rightarrow \widehat{CN} = 20^\circ + y$$

$$\widehat{CMD} = 100^\circ \rightarrow x + 20^\circ + \widehat{NME} + y + 20^\circ = 100^\circ \rightarrow \widehat{NME} = 60^\circ - (x + y)$$

$$\text{زاویه مرکزی } \widehat{BOE} = \widehat{CON} \rightarrow \widehat{BAFE} = \widehat{NME} \rightarrow 20^\circ + (x + y) = 60^\circ - (x + y) \rightarrow 2(x + y) = 40^\circ$$

$$\rightarrow x + y = 20^\circ$$

$$\widehat{BOE} = \widehat{BAFE} = x + y + 20^\circ = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴