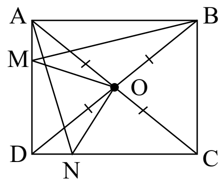
نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه یازدهم فصل دوم تشریحی

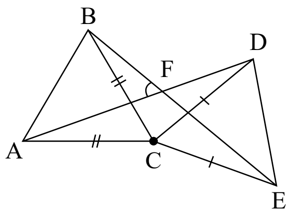
تاریخ آزمون:

۱) در مربع $ABCD$، O مرکز مربع و $AM = DN$. ثابت کنید با دوران به مرکز O و زاویهٔ 90°، مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ بر مثلث $\overset{\triangle}{ADN}$ تصویر می‌شود.

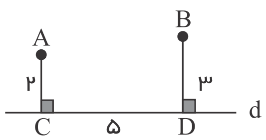


۲) در شکل روبه‌رو، مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEC}$ متساوی‌الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت نقطهٔ A بر B و نقطهٔ D بر E تصویر می‌شود؟

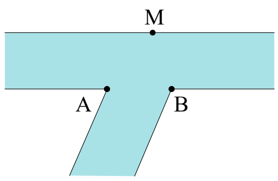
ب) با استفاده از ویژگی‌های تبدیل قسمت (الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $A\hat{F}B = 60^\circ$.



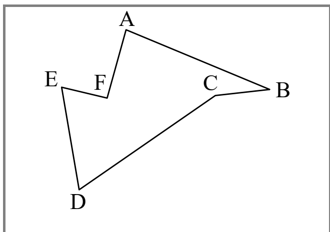
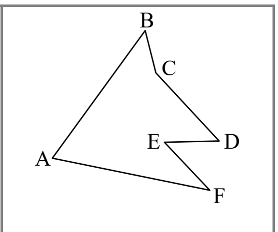
۳) مطابق شکل $CD = 5$ است. نقطهٔ M روی d قرار دارد به طوری که مسیر AMB کوتاهترین مسیر است. طول این مسیر کدامست؟



۴) می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



۵) دور زمین‌هایی مطابق شکل، حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

	
(ب)	(الف)

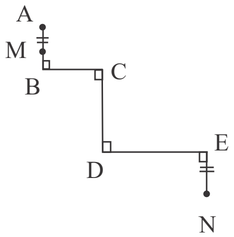
۶) در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

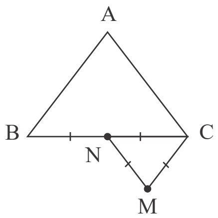
ب) تجانس زاویهٔ بین خطوط را حفظ می‌کند.

۷) ترکیب یک دوران و یک انتقال کدام است؟

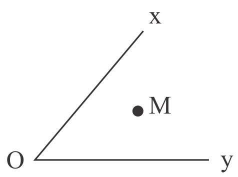
۸) مطابق شکل، $AB =$ ۲ , $BC =$ ۳ , $DC =$ ۴ و $DE =$ ۵ است. اگر $AM = EN$ باشد، طول بردار انتقالی که M را بر N منطبق می‌کند، کدام است؟



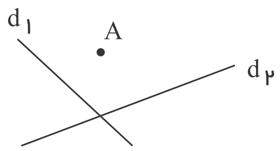
۹) مطابق شکل با ترکیب کدام تبدیل‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع MNC است؟



۱۰) مطابق شکل، با استفاده از کدام تبدیل می‌توان خطی از M گذراند تا Ox و Oy را در A و B قطع کند طوری که $MA = MB$ باشد؟



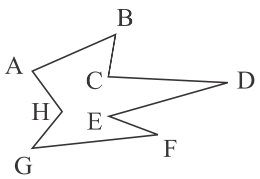
۱۱) اگر بخواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی به رأس A طوری رسم کنیم که دو رأس دیگر آن بر d_1 و d_2 قرار گیرد، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟



۱۲) دو پاره‌خط موازی و مساوی AB و CD بازتاب محوری هم هستند. نوع چهارضلعی $ABCD$ چیست؟

۱۳) نقطهٔ A با سه بازتاب مرکزی متوالی به چهارضلعی $AA'A''B$ تبدیل می‌شود. مساحت این چهارضلعی چند برابر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن مراکز بازتاب می‌باشد؟

۱۴) می‌خواهیم با حفظ محیط این چندضلعی، مساحت آن‌را افزایش دهیم. از چه تبدیلی استفاده می‌کنیم؟



۱۵) ترکیب یک تجانس با مرکز O و یک انتقال چه تبدیلی است؟

۱۶) اگر نقطهٔ A' مجانس A با ضریب k و مرکز O و نقطهٔ A'' مجانس A' با ضریب m و همان مرکز باشد، طول OA'' چند برابر OA است؟

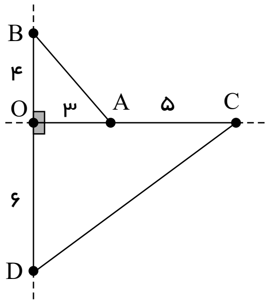
۱۷) مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم مثلث ABC به مرکز تجانس O می‌باشد. اگر $\frac{OA'}{AA'} =$ ۳ و نوع تجانس انقباضی باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۱۸) دو خط d و d' متقاطع‌اند. با چند تبدیل زیر می‌توان خط d را بر خط d' تصویر نمود؟

الف) انتقال   ب) دوران   پ) بازتاب محوری   ت) تجانس

۱) ۴   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۱

۱۹ مطابق شکل، با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مثلث OAB بر مثلث OCD تصویر می‌شود؟



۲۰ ثابت کنید بازتاب محوری در حالت کلی، شیب خط را حفظ نمی‌کند.

پاسخنامه تشریحی

۱ ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\overset{\triangle}{AOM}$ و $\overset{\triangle}{DON}$ هم‌نهشت هستند:

$$\begin{cases} OA = OD \\ AM = DN \\ O\hat{A}M = O\hat{D}N = ۴۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{DON}} \Rightarrow \begin{cases} OM = ON & (۱) \\ A\hat{O}M = D\hat{O}N & (۲) \end{cases}$$

از رابطهٔ (۲) داریم:

$$A\hat{O}M = D\hat{O}N \Rightarrow A\hat{O}M + M\hat{O}D = D\hat{O}N + M\hat{O}D \Rightarrow A\hat{O}D = M\hat{O}N \ , \ A\hat{O}D = ۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} M\hat{O}N = ۹۰^\circ \\ (۱) : OM = ON \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ M با دوران به مرکز O و زاویهٔ ۹۰° بر N تصویر می‌شود. از دوران به مرکز O و زاویهٔ ۹۰°، A بر D تصویر می‌شود و به همین ترتیب، B بر A تصویر می‌شود.

به این ترتیب، رأس‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ بر رأس‌های مثلث $\overset{\triangle}{ADN}$ تصویرمی‌شوند. پس دوران‌یافتهٔ $\overset{\triangle}{ABM}$ به مرکز O و زاویهٔ ۹۰°، بر مثلث $\overset{\triangle}{ADN}$ منطبق می‌شود.

۲

$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow A\hat{C}B = ۶۰^\circ \quad , \quad AC = CB$$

الف) پس می‌توان گفت که نقطهٔ B دوران‌یافتهٔ A به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° است. به همین ترتیب:

$$\overset{\triangle}{CDE} \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow D\hat{C}E = ۶۰^\circ \quad , \quad CD = CE$$

نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ E دوران‌یافتهٔ D به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° است.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که AD تحت دوران به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° روی BE تصویر می‌شود. دوران طولپا است، پس $AD = BE$. همچنین می‌دانیم که زاویهٔ بین خط و دوران‌یافتهٔ آن به اندازهٔ دوران است، پس: $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.

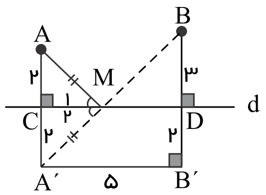
$$\begin{cases} T(A) = B \\ T(D) = E \end{cases} \rightarrow T(AD) = BE$$

۳

مطابق شکل کوتاه‌ترین مسیر AMB است.

بازتاب A نسبت به d، A' است.

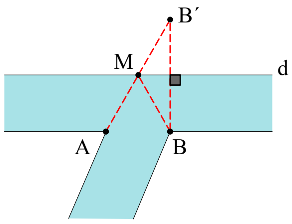
به این ترتیب مسیر AMB، همان $A'B$ است. داریم:



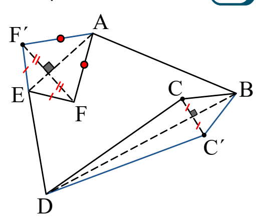
$$A'B^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ \Rightarrow A'B = \sqrt{۵۰} \Rightarrow A'B = ۵\sqrt{۲}$$

۴

این مسأله به این معناست که روی خط d، نقطهٔ M را طوری بیابیم که مسیر AMB کوتاه‌ترین باشد. برای این کار، بازتاب B نسبت به d (B') را یافته و به A وصل می‌کنیم. طبق مسأله هرون مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد. پس اسکلهٔ سوم در M قرار می‌گیرد.



۵ الف) بنابر مسائل هم‌محیطی، کافی است که در رأس‌هایی که زوایا بیشتر از ۱۸۰° هستند، بازتاب محوری انجام شود:

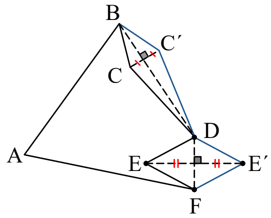


$$AE \text{ محور بازتاب} \Rightarrow F \text{ بازتاب } F'$$
$$\Rightarrow AF = AF' \quad , \quad EF = EF'$$

$$BD \text{ محور بازتاب} \Rightarrow C \text{ بازتاب } C'$$
$$\Rightarrow BC = BC' \quad , \quad DC = DC'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ABCDEF \text{ محیط} = ABC'DEF' \text{ محیط} \\ S_{ABC'DEF'} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

ب)



محور بازتاب $BD \Rightarrow C$ بازتاب C'

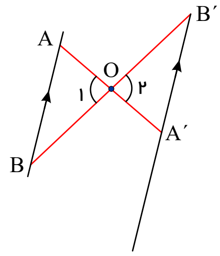
$\Rightarrow BC = BC' \quad , \quad DC = DC'$

محور بازتاب $DF \Rightarrow E$ بازتاب E'

$\Rightarrow DE = DE' \quad , \quad FE = FE'$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'DE'F \\ S_{ABC'DE'F} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

۶ الف) چون $k < ۰$ است، پس به شکل زیر می‌باشد.

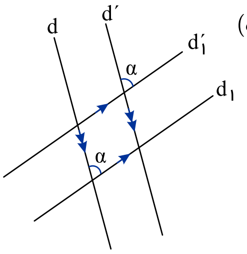


$$OA' = k \times OA, OB' = k \times OB$$

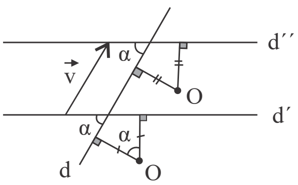
$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} , \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین: $A\overset{\Delta}{O}B \sim A'\overset{\Delta}{O}B' \Rightarrow \hat{B}' = \hat{B}, \hat{A}' = \hat{A} \Rightarrow AB \parallel A'B'$

ب) اگر زاویهٔ بین دو خط متقاطع برابر با α باشد، از آنجا که مجانس خط با آن خط موازی می‌باشد، پس زاویهٔ بین مجانس‌های دو خط همان زاویه بین دو خط (α) می‌باشد.

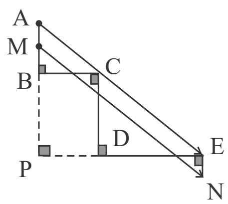


۷



مطابق شکل به مرکز O و زاویهٔ α خط d را دوران می‌دهیم تا خط d' به‌دست آید. خط d' را تحت بردار $\overrightarrow{V}$ انتقال می‌دهیم تا خط d'' به‌دست آید. چون d'' انتقال‌یافتهٔ d' است، پس با آن موازی است، پس زاویهٔ بین d و d''، α است. بنابراین، تحت زاویهٔ α و به مرکز نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویهٔ بین d و d''، می‌توان d را دوران داد تا d'' به‌دست آید.

۸ مطابق شکل داریم:



$EN || AM \ , \ EN = AM \Rightarrow AMNE$ متوازی‌الاضلاع: $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{AE}\right|$

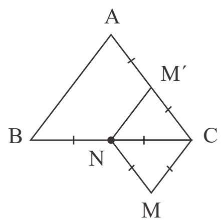
پس برداری که M را بر N منطبق می‌کند، همان بردار $\overrightarrow{AE}$ است. داریم:

$$\begin{cases} AP = AB + BP = ۲ + CD = ۲ + ۴ = ۶ \\ PN = PD + DE = ۳ + ۵ = ۸ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{P}E : AE^۲ = AP^۲ + ON^۲$$

$$\Rightarrow AE^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \Rightarrow AE = ۱۰$$

۹

مطابق شکل، $M'\overset{\Delta}{N}C$ بازتاب محوری $M\overset{\Delta}{N}C$ نسبت به محور BC است. از آنجا که:



$$\begin{cases} CM' = CN = \frac{BC}{۲} \Rightarrow CM' = \frac{AC}{۲} \\ CN = \frac{BC}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{عکس تالس} : M'N || AB \Rightarrow \frac{CA}{CM'} = \frac{CB}{CN} = ۲$$

پس $\overset{\Delta}{NM'C}$ با تجانس به مرکز C و نسبت $k = ۲$، به $\overset{\Delta}{ABC}$ تصویر می‌شود.

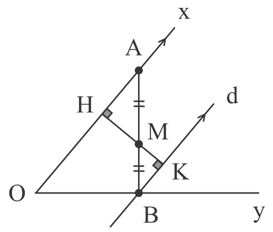
۱۰

مطابق شکل، MH بر Ox عمود است. قرینهٔ H نسبت به M، نقطهٔ K می‌باشد. از نقطهٔ K خط d عمود بر HK می‌گذرانیم.

$d||Ox$ می‌باشد و Oy را در B قطع می‌کند.

دو مثلث MAH و MBK هم‌نهشت هستند، پس داریم: $AM = MB$.

در این روش از بازتاب مرکزی H نسبت به M استفاده کردیم.



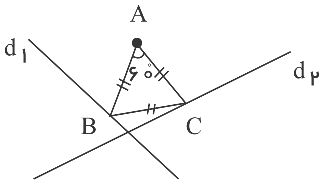
۱۱

مطابق شکل، اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ پاسخ مسأله باشد، داریم: $BC = AB = AC$.

مشخص است که C دوران‌یافتهٔ B به مرکز A و زاویهٔ ۶۰° است.

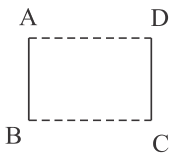
پس برای یافتن C، $d_۱$ را به مرکز A و شعاع ۶۰° دوران می‌دهیم تا $d_۲$ را در C قطع کند.

به همین ترتیب با دوران C به مرکز A و زاویهٔ -۶۰° ، نقطهٔ B به‌دست می‌آید.



۱۲

مطابق شکل AB و CD موازی و مساوی‌اند و تنها در حالتی که محور تقارن بر AD عمود بوده و منصف آن باشد، بازتاب محوری یکدیگر هستند. بنابراین، $ABCD$ مستطیل می‌باشد.



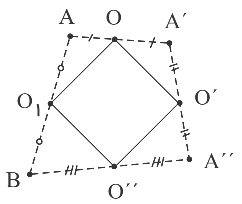
۱۳

پاسخ: مطابق شکل، A' بازتاب A به مرکز O می‌باشد.

به همین ترتیب، A'' و B هم‌بازتاب A' و A'' به مراکز O' و O'' می‌باشد.

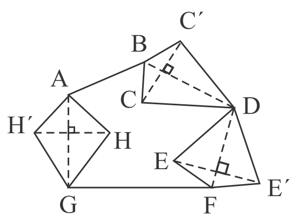
در چهارضلعی $AA'A''B$، O و O' و O'' و $O_۱$ وسط‌های اضلاع هستند.

پس $OO_۱O''O'$ متوازی‌الاضلاعی است که مساحت آن نصف $AA'A''B$ می‌باشد.



۱۴

مطابق شکل با استفاده از بازتاب محوری، رأس‌های C و E و H بازتاب شده و نقاط C' و E' و H' به‌دست می‌آید. از آنجا که بازتاب محوری طولپاست، پس محیط شکل جدید تغییر نمی‌کند ولی مساحت آن افزایش می‌یابد.



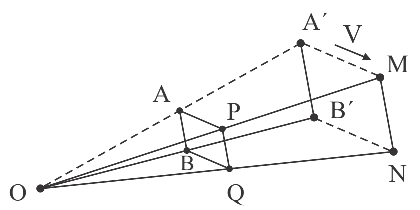
۱۵ مطابق شکل A' مجانس A به مرکز تجانس نقطهٔ O و ضریب k است. به همین ترتیب، B' مجانس B به مرکز تجانس نقطهٔ O و ضریب k است. $A'B'$ را تحت بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم تا MN حاصل شود.

داریم:

$$AP||A'M \ , \ \ BQ||B'N \ , \ \ AB||A'B'$$

$$\Rightarrow \frac{OP}{OM} = \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \ , \ \ \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OQ}{ON} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{ON} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{PQ}{MN}$$



می‌دانیم که $AB||MN$ و $\frac{A'B'}{AB} = k$ پس $\frac{MN}{AB} = $. پس MN مجانس AB با ضریب تجانس K است.

۱۶ اگر A' مجانس نقطهٔ A به ضریب k باشد، داریم:

$$\overline{OA'} = k \times \overline{OA}$$

اگر A'' مجانس نقطهٔ A' به ضریب m باشد، داریم:

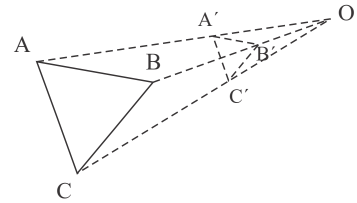
$$\overline{OA''} = m \times \overline{OA'} \Rightarrow \overline{OA''} = m \times (k \times \overline{OA}) = mk \cdot \overline{OA}$$

پس نقطهٔ A'' مجانس A به همان مرکز و ضریب mk است.

۱۷ مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم انقباضی مثلث ABC به مرکز تجانس O و ضریب k است. داریم:

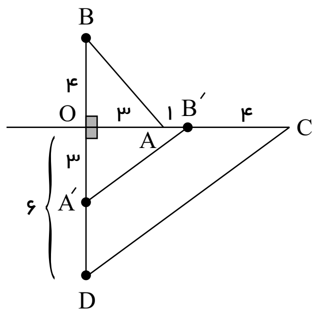
$$k = \frac{OA'}{AA'} = ۳ \Rightarrow \frac{OA'}{OA' + AA'} = \frac{OA'}{OA} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{S(A'\overset{\Delta}{B'}C')}{S(A\overset{\Delta}{B}C)} = (\frac{OA'}{OA})^{۲} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{۱۶}{۹}S(A'\overset{\Delta}{B'}C')$$



۱۸ گزینهٔ «۲»: دو خط متقاطع شیب‌های نابرابر دارند، بنابراین نمی‌توانند انتقال‌یافتهٔ یکدیگر باشند (انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند). به همین ترتیب، چون تجانس هم شیب خط را حفظ می‌کند، پس دو خط متقاطع نمی‌توانند مجانس یکدیگر باشند.

۱۹ ابتدا به مرکز O و زاویهٔ -۹۰°، مثلث OAB را دوران می‌دهیم تا مثلث $OA'B'$ به‌دست آید. حال مجانس $O\overset{\Delta}{A'}B'$ به مرکز O و نسبت تجانس ۲ $k = \frac{OC}{OB'} = \frac{OD}{OA'} =$ را به‌دست می‌آوریم تا مثلث OCD به‌دست آید.

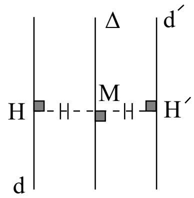


۲۰

در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) در این حالت، محور بازتاب (Δ) با خط d موازی است و درنتیجه، بازتاب خط d (خط d') با آن موازی می‌باشد:

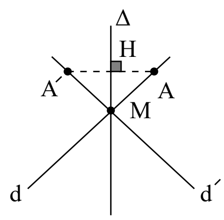
$$\widehat{M} = \hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ \quad , \quad MH = MH' \Rightarrow d \| \Delta \| d'$$



در این حالت، شیب خط حفظ می‌شود (چون $d \| d'$ است).

ب) در این حالت، خط d و محور بازتاب (Δ) متقاطع‌اند. بازتاب خط d نسبت به محور Δ، خط d' می‌باشد و d، d' و Δ در نقطهٔ M متقاطع‌اند.

$$\Delta \text{ محوربازتاب} : \hat{H} = ۹۰^\circ \quad , \quad AH = A'H$$



از آنجا که d و d' متقاطع هستند، پس موازی نبوده و درنتیجه، شیب خط d و d' یکسان نخواهد بود. بنابراین در این حالت، شیب خط حفظ نمی‌شود.