نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه یازدهم فصل دوم تستی

تاریخ آزمون:

۱) واژه‌های زیر را تعریف کنید.

الف) ایزومتری ب) دو خط متنافر ج) صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط

۲) در تجانسی با نسبت $k < ۰$ و مرکز تجانس O نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویهٔ بین خطوط را حفظ می‌کند.

۳) در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۴) تحت تبدیل تجانس به مرکز $(۰,۰)$، نقطهٔ $A(۱,۲)$ روی نقطهٔ $A'(۳,۶)$ تصویر شده است. نسبت تجانس را یافته و تعیین کنید این تجانس، انبساط است یا انقباض؟

۵) نقطهٔ M به فاصلهٔ a از مبدأ مختصات قرار دارد. این نقطه را به مرکز O (مبدأ مختصات) دو بار تحت زاویهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم تا نقطهٔ N به‌دست آید. طول MN کدام است؟

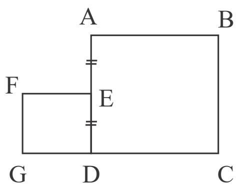
۶) دو دایره با شعاع‌های برابر با R مماس خارجند. بردار انتقالی که دو دایره را برهم منطبق می‌کند، کدام است؟

۷) ترکیب یک دوران و یک انتقال کدام است؟

۸) تحت یک تجانس محیط مثلث تصویر ۱۲ و محیط مثلث اولیه ۴ است. شعاع دایره‌ای که مجانس دایره‌ای به مساحت ۱۶π تحت این تجانس باشد، چقدر است؟

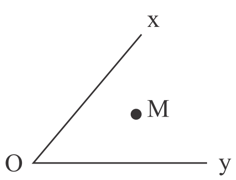
۹) نقطهٔ M درون زاویهٔ xOy قرار دارد. می‌خواهیم A و B را بر Ox و Oy بیابیم که محیط $M\overset{\Delta}{A}B$ کمترین مقدار ممکن باشد. کدام تبدیل استفاده می‌شود؟

۱۰) مطابق شکل $ABCD$ و $EFGD$ مربع هستند و E وسط AD است. با ترکیب کدام تبدیل‌ها، $ABCD$ تصویر $EFGD$ است؟

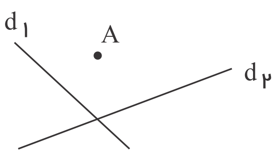


۱۱) دایرهٔ $C(O,R)$ و پاره‌خط AB در صفحه مفروض‌اند. در دایرهٔ C وتری موازی و مساوی AB رسم می‌کنیم. حداکثر چند وتر می‌توان یافت؟

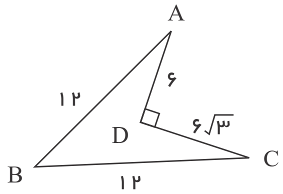
۱۲) مطابق شکل، با استفاده از کدام تبدیل می‌توان خطی از M گذراند تا Ox و Oy را در A و B قطع کند طوری که $MA = MB$ باشد؟



۱۳) اگر بخواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی به رأس A طوری رسم کنیم که دو رأس دیگر آن بر $d_۱$ و $d_۲$ قرار گیرد، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟



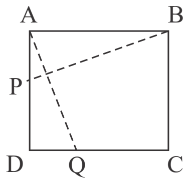
۱۴ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت جدید چقدر است؟



۱۵ تصویر یک خط تحت یک تبدیل بر همان خط منطبق است. این تبدیل چه تبدیل‌هایی می‌تواند باشد؟

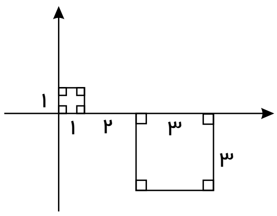
۱۶ نقطهٔ A با سه بازتاب مرکزی متوالی به چهارضلعی $AA'A''B$ تبدیل می‌شود. مساحت این چهارضلعی چند برابر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن مراکز بازتاب می‌باشد؟

۱۷ چهارضلعی $ABCD$ مربع است و داریم: $AP = DQ$. تحت چه تبدیلی مثلث $A\overset{\Delta}{P}B$ بر مثلث $A\overset{\Delta}{D}Q$ منطبق می‌شود؟



۱۸ اگر نقطهٔ $\begin{vmatrix} ۲ \\ ۴ \end{vmatrix}$ A' مجانس نقطهٔ $\begin{vmatrix} -۲ \\ ۱ \end{vmatrix}$ A باشد که ضریب تجانس آن $k = ۵$ باشد، مرکز تجانس کجاست؟

۱۹ مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم مثلث ABC به مرکز تجانس O می‌باشد. اگر $\frac{OA'}{AA'} = ۳$ و نوع تجانس انقباضی باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟



۲۰ با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مربع کوچک‌تر به مربع بزرگ‌تر تبدیل می‌شود؟

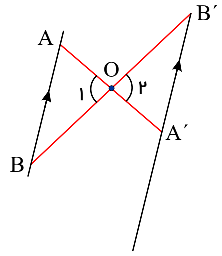
پاسخ‌نامه تشریحی

۱ الف) تبدیلی که فاصلهٔ بین نقطه‌ها (طول پاره‌خط‌ها) را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود.

ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط متنافر می‌نامیم.

ج) صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط بر آن عمود باشد، صفحهٔ عمودمنصف آن پاره‌خط می‌نامیم.

۲ الف) چون $k<۰$ است، پس به شکل زیر می‌باشد.

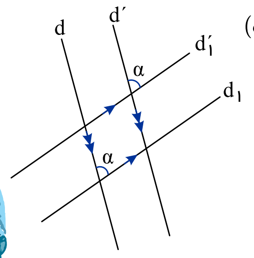


$$OA'=k\times OA, OB'=k\times OB$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}, \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین: $A\overset{\Delta}{O}B\sim A'\overset{\Delta}{O}B' \Rightarrow \hat{B}'=\hat{B}, \hat{A}'=\hat{A}\Rightarrow AB\parallel A'B'$

ب) اگر زاویهٔ بین دو خط متقاطع برابر با α باشد، از آنجا که مجانس خط با آن خط موازی می‌باشد، پس زاویهٔ بین مجانس‌های دو خط همان زاویه بین دو خط (α) می‌باشد.

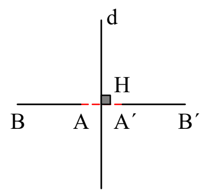


۳

$AB\perp d$, $\hat{H}=۹۰^\circ$

$AH=A'H, BH=B'H$

$$\begin{cases} AB=BH-AH \\ A'B'=B'H-A'H \end{cases}\Rightarrow AB=A'B'$$

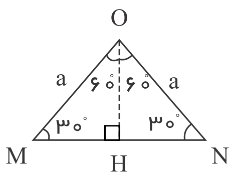


۴

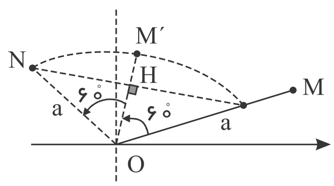
$$A(۱,۲)\to A'(۳,۶)\Rightarrow k=\frac{OA'}{OA}=\frac{\sqrt{۳^۲+۶^۲}}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۳$$

تجانس، انبساط است زیرا $k>۱$ است.

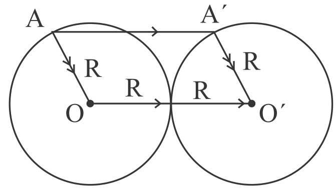
۵ مطابق شکل داریم:



$$O\overset{\Delta}{M}N(\hat{M}=۳۰^\circ): OH=\frac{a}{۲}, MH=HN=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\Rightarrow MN=\sqrt{۳}a$$



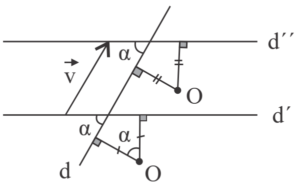
۶ مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} OO' \| AA' \\ O'A' \| OA \end{cases} ,\quad OA = O'A' = R \Rightarrow \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \left|\overrightarrow{OO'}\right| = ۲R$$

بنابراین، بردار انتقال، بردار $\overrightarrow{OO'}$ به طول $۲R$ است.

۷



مطابق شکل به مرکز O و زاویهٔ α خط d را دوران می‌دهیم تا خط d' به‌دست آید. خط d' را تحت بردار $\overrightarrow{V}$ انتقال می‌دهیم تا خط d'' به‌دست آید. چون d'' انتقال‌یافتهٔ d' است، پس با آن موازی است، پس زاویهٔ بین d و d''، α است. بنابراین، تحت زاویهٔ α و به مرکز نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویهٔ بین d و d''، می‌توان d را دوران داد تا d'' به‌دست آید.

۸ دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه مثلث دومی به اولی همان نسبت محیط آنهاست. داریم:

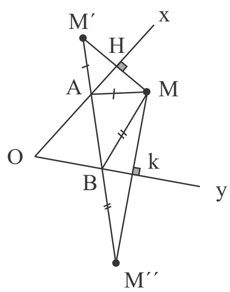
$$\text{(نسبت تشابه و نسبت تجانس)}\ k = \frac{۱۲}{۴} = ۳ \Rightarrow \frac{\text{شعاع دایرهٔ تصویر}}{\text{شعاع دایرهٔ اولیه}} = ۳ \Rightarrow \frac{\text{مساحت دایرهٔ تصویر}}{\text{مساحت دایرهٔ اولیه}} = ۳^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{۱۶\pi} = ۹ \Rightarrow S' = ۹ \times ۱۶\pi \Rightarrow \pi \times R'^۲ = ۹ \times ۱۶\pi \Rightarrow R' = ۱۲$$

۹

مطابق شکل، بازتاب M نسبت به Ox و Oy به‌ترتیب، M' و M'' می‌باشد.

$M'M''$ اضلاع زاویه را در A و B قطع می‌کند.

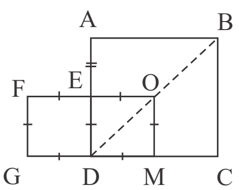


محیط $M\overset{\triangle}{A}B$ کمترین می‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} MA = AM' \\ MB = M''B \end{cases} \Rightarrow MA + MB + AB = M'A + M''B + AB = M'M''$$

۱۰

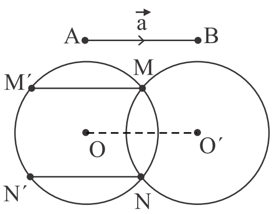
مطابق شکل، مربع $OEDM$ بازتاب محوری $EFGD$ نسبت به محور AD می‌باشد.



از آنجا که CD و BD و AD در D همرسند و داریم: $\frac{CD}{DM} = \frac{DB}{OD} = \frac{AD}{DE} = ۲$، پس $ABCD$ مجانس $OEDM$ به مرکز تجانس D و ضریب ۲ می‌باشد.

همچنین می‌توان با دوران $EFGD$ به مرکز D و زاویهٔ -۹۰°، $OEDM$ را به‌وجود آورد و سپس با تجانس به مرکز D و ضریب ۲، $k = ۲$، آن را بر $ABCD$ تصویر کرد.

۱۱

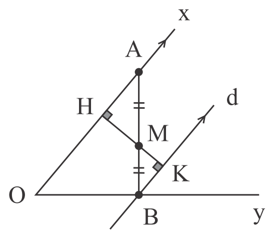


پاسخ: مطابق شکل، دایرهٔ C را با بردار $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا دایره‌ای به مرکز O' و شعاع R به‌دست آید.

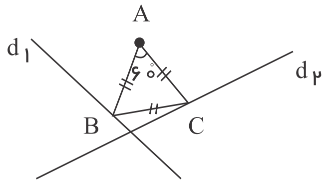
دو دایره حداکثر در دو نقطه (M و N) می‌توانند متقاطع باشند. MM' و NN' وترهای موازی با AB و به طول a می‌باشند.

۱۲

مطابق شکل، MH بر Ox عمود است. قرینهٔ H نسبت به M، نقطهٔ K می‌باشد. از نقطهٔ K خط d عمود بر HK می‌گذرانیم.
$d||Ox$ می‌باشد و Oy را در B قطع می‌کند.
دو مثلث MAH و MBK هم‌نهشت هستند، پس داریم: $AM=MB$.
در این روش از بازتاب مرکزی H نسبت به M استفاده کردیم.



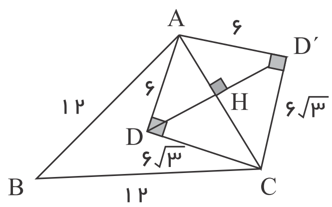
۱۳ مطابق شکل، اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ پاسخ مسأله باشد، داریم: $BC=AB=AC$.
مشخص است که C دوران‌یافتهٔ B به مرکز A و زاویهٔ ۶۰° است.
پس برای یافتن C، $d_۱$ را به مرکز A و شعاع ۶۰° دوران می‌دهیم تا $d_۲$ را در C قطع کند.
به همین ترتیب با دوران C به مرکز A و زاویهٔ -۶۰°، نقطهٔ B به‌دست می‌آید.



۱۴ اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم باید بازتاب D را نسبت به محور AC بدست آوریم. بدین ترتیب چهارضلعی جدید محیطش با محیط $ABCD$ برابر است و مساحت آن از مساحت $ABCD$ بیشتر است. به این ترتیب داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC}: AC^۲ = ۶^۲ + (۶\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow AC = ۱۲$$

$$S_{\overset{\Delta}{AD'C}} = \frac{۶\times ۶\sqrt{۳}}{۲} = ۱۸\sqrt{۳}$$

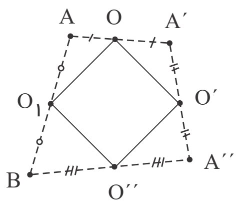


افزایش مساحت برابر است با:

$$۲S_{\overset{\Delta}{ADC}} = ۲\times ۱۸\sqrt{۳} = ۳۶\sqrt{۳}$$

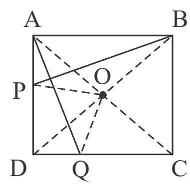
۱۵ اگر مرکز تجانس روی خط قرار گیرد، مجانس خط بر آن منطبق می‌شود. اگر محور بازتاب، همان خط یا محور عمود بر خط باشد، بازتاب خط بر خود آن منطبق خواهد شد. با انتقال خط تحت برداری موازی با خط، تصویر انتقال بر خط منطبق خواهد شد.

۱۶ پاسخ: مطابق شکل، A' بازتاب A به مرکز O می‌باشد.
به همین ترتیب، A'' و B هم‌بازتاب A' و A'' به مراکز O' و O'' می‌باشد.
در چهارضلعی $AA'A''B$، O و O' و O'' و $O_۱$ وسط‌های اضلاع هستند.
پس $OO_۱O''O'$ متوازی‌الاضلاعی است که مساحت آن نصف $AA'A''B$ می‌باشد.



۱۷ مطابق شکل، با دوران به مرکز O محل برخورد قطرهای مربع (مرکز مربع) و زاویهٔ ۹۰°، رأس B از مثلث APB به رأس A از مثلث ADQ و همچنین رأُس A از مثلث APB به رأس D از مثلث ADQ منطبق می‌شود. داریم:

$$\begin{cases} AP = DQ \\ O\hat{D}Q = O\hat{A}P = ۴۵^\circ \\ OD = OA \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOP} \simeq \overset{\Delta}{DOQ} \Rightarrow \begin{cases} D\hat{O}Q = A\hat{O}P & (۱) \\ OP = OQ & (۲) \end{cases}$$



از طرفی داریم:

$$(۱): A\hat{O}P + P\hat{O}D = ۹۰^\circ = P\hat{O}D + D\hat{O}Q = P\hat{O}Q = ۹۰^\circ$$

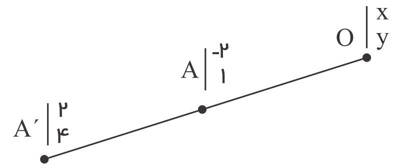
بنابر تساوی (۲) و مطلب فوق، نقطهٔ P از مثلث $\overset{\Delta}{APB}$ به مرکز O و زاویهٔ ۹۰° دوران یافته و به نقطهٔ Q تبدیل می‌شود.

۱۸ مطابق شکل:

$$k = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (۲-x, ۴-y) \;,\; \overrightarrow{OA} = (-۲-x, ۱-y)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = ۵ \times \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{cases} ۲ - x = ۵(-۲ - x) = -۱۰ - ۵x \Rightarrow x = -۳ \\ ۴ - y = ۵(۱ - y) = ۵ - ۵y \Rightarrow y = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

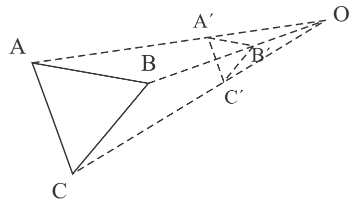
$$\Rightarrow O \left| \begin{matrix} -۳ \\ \frac{۱}{۴} \end{matrix} \right.$$



۱۹ مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم انقباضی مثلث ABC به مرکز تجانس O و ضریب k است. داریم:

$$k = \frac{OA'}{AA'} = ۳ \Rightarrow \frac{OA'}{OA' + AA'} = \frac{OA'}{OA} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{S(A'\overset{\Delta}{B'}C')}{S(A\overset{\Delta}{B}C)} = (\frac{OA'}{OA})^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{۱۶}{۹} S(A'\overset{\Delta}{B'}C')$$



۲۰ از آنجا که مطابق شکل، ابعاد مربع کوچک در تصویر آن، ۳ برابر شده است، پس حتماً تجانس جزو تبدیل‌ها خواهد بود. ابتدا تجانس به مرکز مبدأ مختصات و با ضریب $k = ۳$ و سپس بازتاب نسبت به محور xها و سپس انتقال با برداری به طول ۳ موازی محور xها خواهیم داشت.