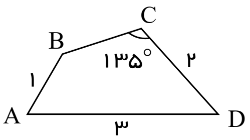
نام و نام خانوادگی:　　　　　　　　زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه یازدهم فصل سوم تستی

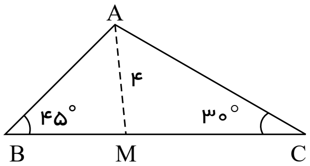
تاریخ آزمون:

۱) دایره‌ای به قطر $AD$ از $A$ و $B$ و $D$ می‌گذرد. زاویهٔ $B$ کدام است؟



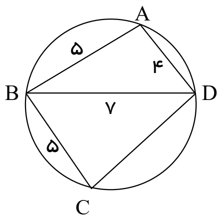

۱) $۱۳۵^\circ$　　۲) $۱۵۰^\circ$
۳) $۱۲۰^\circ$　　۴) $۱۰۵^\circ$

۲) در شکل مقابل بیشترین مقدار $AB+AC$ کدام است؟




۱) $۴\sqrt{۲}+۲$　　۲) $۲\sqrt{۲}+۸$
۳) $۸\sqrt{۲}+۲$　　۴) $۴\sqrt{۲}+۸$

۳) در شکل مقابل محیط چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟




۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۲۳

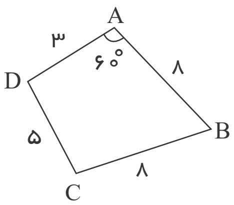
۴) حداکثر مساحت مثلث با دو ضلع ۳ و ۱۲ کدام است؟

۱) ۲۴　　۲) ۳۶　　۳) ۱۸　　۴) ۳۰

۵) کوچکترین قطر ۱۲ ضلعی منتظم برابر با $\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$ است. محیط آن کدام است؟ $(\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴})$

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$　　۲) $۱۲\sqrt{۶}$　　۳) $۸\sqrt{۶}$　　۴) $۶\sqrt{۶}$

۶) در شکل زیر، مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

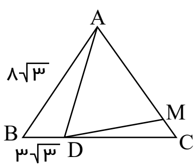



۱) $۱۲\sqrt{۳}$　　۲) $۱۶\sqrt{۳}$
۳) $۱۸\sqrt{۳}$　　۴) $۲۰\sqrt{۳}$

۷) در مثلث $ABC$، با زوایای حاده $\sin\hat{A}=\frac{۱}{۳}$، $\sin\hat{B}=\frac{۱}{۶}$ است. حدود سینوس زاویهٔ $C$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}<\sin\hat{C}<\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۳}<\sin\hat{C}<\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۱}{۲}<\sin\hat{C}<\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{۶}<\sin\hat{C}<\frac{۱}{۳}$

۸) در مثلث متساوی‌الاضلاع $ABC$ به ضلع $۸\sqrt{۳}$ داریم $BD=۳\sqrt{۳}$ و $AD=AM$؛ مساحت مثلث $DMC$ کدام است؟




۱) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$　　۲) $۱۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$　　۴) $۱۵\sqrt{۳}$

۹) در مثلث $ABC$، $\cos(\hat{A}+\hat{B})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $AB=۴$ است. مساحت دایرهٔ محیطی مثلث کدام است؟

۱) $۳\pi$ ۲) $۶\pi$ ۳) $۹\pi$ ۴) $۱۸\pi$

۱۰) در مثلث $ABC$، $AD$ نیمساز داخلی زاویهٔ $A$ است. اگر $AC=۲AD$، $BD=۳$ و $CD=۸$ باشد، طول نیمساز $AD$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۱) اگر در مثلثی $c=۵$ و $b=۷$ و $a=۹$ باشد، زاویه‌ی $\hat{A}$ در چه محدوده‌ای قرار دارد؟

۱) $۶۰^\circ<\widehat{A}<۹۰^\circ$ ۲) $۹۰^\circ<\widehat{A}<۱۲۰^\circ$ ۳) $۱۲۰^\circ<\widehat{A}<۱۵۰^\circ$ ۴) $۱۵۰^\circ<\widehat{A}<۱۸۰^\circ$

۱۲) در مثلث $ABC$ به اضلاع ۶، ۵ و ۷ واحد، اگر $G$ نقطهٔ همرسی میانه‌ها باشد،مساحت مثلث $AGC$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۳) در مثلث $ABC$، رابطهٔ $m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲+c^۲}$ برقرار است. نسبت $\frac{a}{m_a}$ کدام است؟ ($m_a$ میانهٔ وارد بر ضلع $a$ است.)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۴) در مثلث $ABC$ که محیطش $P$ می‌باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ ($r$ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است.)

$$\frac{a(\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C})+b(\cos\widehat{A}+\cos\widehat{C})+c(\cos\widehat{B}+\cos\widehat{A})}{S}$$

۱) $\frac{۲}{r}$ ۲) $۲r$ ۳) $\frac{r}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}r$

۱۵) در مثلث $ABC$ با اضلاع ۳ و ۷ و ۸، از محل همرسی میانه‌ها پاره‌خطی موازی ضلع بزرگتر رسم می‌کنیم. مساحت بزرگترین ذوزنقهٔ حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۵}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۵}{\sqrt{۲}}$

۱۶) در مثلث $ABC$ ، نیمسازداخلی $AD$ رسم می‌شود. اگر $R_۱$ و $R_۲$ به ترتیب شعاع‌های دایرهٔ محیطی مثلث‌های $ABD$ و $ACD$ باشند، حاصل $\frac{R_۱}{R_۲}$ برابر است با ..................

۱) $\frac{c}{b}$ ۲) $\frac{b}{c}$ ۳) $\frac{b^۲}{c^۲}$ ۴) $\frac{c^۲}{b^۲}$

۱۷) در مثلث $ABC$ داریم: $a=۸$ و $b=۴$ و $c=۱۰$ . اگر نیمساز زاویه‌ی خارجی $A$ امتداد ضلع $BC$ را در $D$ قطع کند، آن‌گاه اندازه‌ی $DC$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

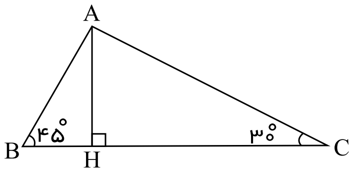
۱۸) در مثلثی با طول اضلاع $m-۲$ و $m$ و $\sqrt{۳}$، محل همرسی ارتفاع‌ها خارج از مثلث است. حدود $m$ کدام است؟

۱) $m>\frac{۳}{۲}$ ۲) $m>۲$ ۳) $m>\frac{۷}{۴}$ ۴) $m>۱$

۱۹) در مثلث $ABC$، اگر $\hat{C}=۳\hat{A}$ و $\sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{AB}{BC}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲٫۵ ۴) ۴

۲۰ در مثلث روبه‌رو اگر $BC = ۱۹/۲$ باشد، در این صورت $BH$ کدام است؟ $(\sin ۱۰۵^\circ = ۰/۹۶)$




۱) $۵\sqrt{۲}$

۲) $\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۳) $۱۰\sqrt{۲}$

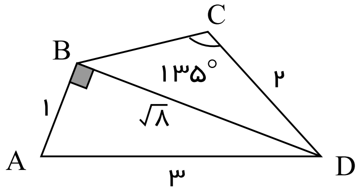
۴) ۱۰

# پاسخنامه تشریحی

**۱** — ۱ ۲ **۳** ۴

چون دایره‌ای به قطر $AD$ از $A$ و $B$ و $D$ می‌گذرد، پس $A\hat{B}D = 90^\circ$ خواهد بود. داریم:

$$\overset{\triangle}{ABD}:\ BD^2 = 3^2 - 1^2 \Rightarrow BD = \sqrt{8}$$




در مثلث $BCD$ طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\overset{\triangle}{BCD}:\ R = \frac{\sqrt{8}}{2\sin 135^\circ} = \frac{\sqrt{8}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{BCD}:\ R = 2 = \frac{CD}{2\sin D\widehat{B}C} = \frac{2}{2\sin D\widehat{B}C} \Rightarrow \sin D\widehat{B}C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D\widehat{B}C = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

**۲** — ۱ ۲ ۳ **۴**

فرض: $A\widehat{M}B = \alpha \Rightarrow A\widehat{M}C = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \sin A\widehat{M}B = \sin A\widehat{M}C$

در دو مثلث $ABM$ , $AMC$ قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABM}:\ \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}\sin\alpha \\ \overset{\triangle}{AMC}:\ \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\sin\alpha} \Rightarrow AC = 8\sin\alpha \end{cases}$$

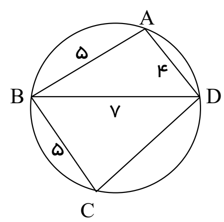
$$\Rightarrow AB + AC = 4\sqrt{2}\sin\alpha + 8\sin\alpha = (4\sqrt{2}+8)\sin\alpha$$

بیشترین مقدار آن زمانی است که $\sin\alpha = 1$ و $\alpha = 90^\circ$ باشد. پس بیشترین مقدار $AB + AC$ برابر است با:

$$4\sqrt{2} + 8$$

**۳** — ۱ **۲** ۳ ۴

$$\overset{\triangle}{ABD}\ \text{قضیهٔ کسینوس‌ها}:\ 7^2 = 5^2 + 4^2 - 2\times5\times4\cos\hat{A} \Longrightarrow \cos\hat{A} = -\frac{1}{5}$$




چهار ضلعی محاطی است $ABCD \rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \cos\hat{C} = -\cos\hat{A} \rightarrow \cos\hat{C} = \frac{1}{5}$

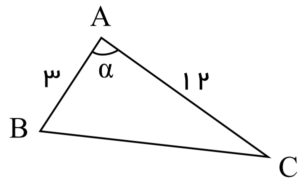
$$\overset{\triangle}{BCD}\ \text{قضیهٔ کسینوس‌ها}:\ 7^2 = 5^2 + CD^2 - 2\times5\times CD\times\cos\hat{C}$$

$$\rightarrow CD^2 - 2CD - 24 = 0 \rightarrow (CD-6)(CD+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} CD = 6 \\ CD = -4 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

محیط چهاضلعی $ABCD = 4 + 5 + 5 + 6 = 20$

**۴** — ۱ ۲ **۳** ۴ باتوجه به شکل داریم:

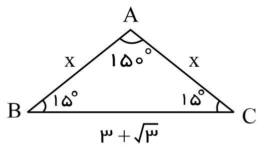
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\times3\times12\times\sin\alpha = 18\sin\alpha$$



بیشترین مقدار مساحت زمانی است که $\sin\alpha = 1$ باشد. پس $\max(S_{\overset{\Delta}{ABC}}) = 18$.

**۵** ۱ ۲ ۳ **۴** هر زاویهٔ داخلی ۱۲ ضلعی منتظم برابر است با:

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ$$



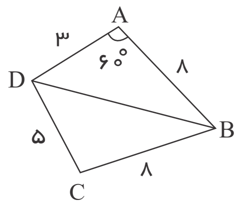

بنابراین مطابق شکل و فرض داریم:

قضیه سینوس‌ها : $\dfrac{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{\sin 150^\circ} = \dfrac{x}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \dfrac{\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \dfrac{4x}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$

$$\Rightarrow 4x = \sqrt{6}(3-1) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

محیط ۱۲ ضلعی منتظم $= 12 \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{6}$

**۶** ۱ **۲** ۳ ۴




قضیه کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{ABD}$ : $BD^2\ AD^2 + AB^2 - 2AD\,AB\cos 60^\circ = 8^2 + 3^2 - 2\times 3\times 8\times\cos 60^\circ \rightarrow BD = 7$

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\hat{A} = \frac{1}{2}\times 8\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$P_{\overset{\Delta}{BCD}} = \frac{8+5+7}{2} = 10$$

$$S_{\overset{\Delta}{BCD}} = \sqrt{10(10-5)(10-8)(10-7)} = 10\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} + S_{\overset{\Delta}{BCD}} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

**۷** ۱ ۲ ۳ **۱** طبق نامساوی مثلث و همچنین قضیه سینوس‌ها داریم:

$$a+b>c>|a-b| \Rightarrow 2R\sin\hat{A} + 2R\sin\hat{B} > 2R\sin\hat{C} > |2R\sin\hat{A} - 2R\sin\hat{B}|$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A} + \sin\hat{B} > \sin\hat{C} > |\sin\hat{A} - \sin\hat{B}|$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} > \sin\hat{C} > \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right| \Rightarrow \frac{1}{2} > \sin\hat{C} > \frac{1}{6}$$

**۸** ۱ ۲ **۳** ۴ قرار می‌دهیم $AD = x$. طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\overset{\Delta}{ABD} : \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow x^2 = (8\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2\times 8\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}\times\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 3\times 64 + 3\times 9 - 72 \Rightarrow x = 7\sqrt{3}$$

$$AD = AM = 7\sqrt{3} \Rightarrow MC = AC - AM = 8\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\overset{\Delta}{DMC} : MC = \sqrt{3},\ DC = BC - BD = 8\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3},\ \hat{C} = 60^\circ$$

$$S_{\overset{\Delta}{DMC}} = \frac{1}{2}\times MC\times DC\times\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

**۹** ۴ ۳ **۲** ۱

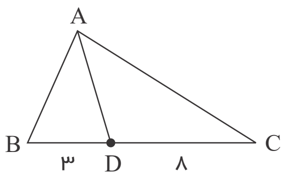
$$\cos(\hat{A}+\hat{B})=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \to \cos(۱۸۰^\circ - C)=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \to -\cos C=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \to \cos C=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \to \cos C=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin^۲ C+\cos^۲ C=۱ \to \sin^۲ C+\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲=۱ \to \sin^۲ C=\frac{۲}{۳} \to \sin C=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}\ \text{قضیهٔ سینوس‌ها در}:\ \frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R \to \frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}=۲R \to R=\frac{۴\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$$

$$\to R=\sqrt{۶} \to S_{\text{دایرهٔ محیطی مثلث}}=\pi R^۲=۶\pi$$

**۱۰** **۴** ۳ ۲ ۱



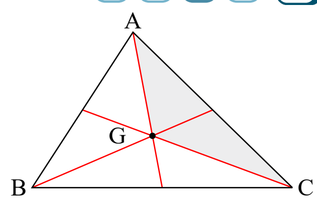

$$\overset{\triangle}{ABC}\ :\ \text{قضیهٔ نیمساز}\ \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{۳}{۸} \to \begin{cases} AB=۳x \\ AC=۸x \to AD=۴x \end{cases}$$

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times DC \to (۴x)^۲=۳x\times ۸x-۳\times ۸ \to x=\sqrt{۳} \to AD=۴\sqrt{۳}$$

**۱۱** ۴ ۳ **۲** ۱ طول اضلاع را در رابطه‌ی کسینوس‌ها قرار می‌دهیم.

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$$
$$\Rightarrow ۹^۲=۷^۲+۵^۲-۷۰\cos\hat{A}$$
$$۷۰\cos\hat{A}=-۷ \Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{-۱}{۱۰} \Rightarrow \frac{-۱}{۲}<\frac{-۱}{۱۰}<۰ \Rightarrow ۱۲۰^\circ>\hat{A}>۹۰^\circ$$

**۱۲** ۴ **۳** ۲ ۱




$$P=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹$$
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\sqrt{۹\times ۴\times ۳\times ۲}=۶\sqrt{۶}$$
$$S_{\overset{\triangle}{AGC}}=\frac{۱}{۳}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۳}\times ۶\sqrt{۶}=۲\sqrt{۶}$$

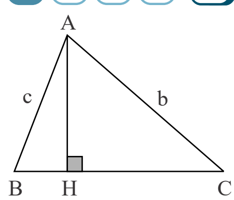
**۱۳** ۴ ۳ ۲ **۱**

طبق قضیهٔ میانه‌ها و فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲} \\ m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲+c^۲} \Rightarrow b^۲+c^۲=۴m_a^۲ \end{cases} \Rightarrow ۲m_a^۲=\frac{a^۲}{۲} \Rightarrow \frac{a^۲}{m_a^۲}=۴ \Rightarrow \frac{a}{m_a}=۲$$

**۱۴** ۴ ۳ ۲ **۱** باتوجه به شکل داریم:

$$BC=a=BH+CH\ ,\ BH=c\cdot\cos\widehat{B}\ ,\ CH=b\cdot\cos\widehat{C}$$
$$\Rightarrow BC=b\cdot\cos\widehat{C}+c\cdot\cos\widehat{B}=a$$




به همین ترتیب داریم:

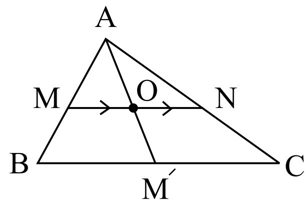
$$b=a\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{A}\ ,\ c=a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A}$$

$$\Rightarrow (b\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{B})+(a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A})+(a\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{A})=a+c+b=P$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a(\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C})+b(\cos\widehat{A}+\cos\widehat{C})+c(\cos\widehat{B}+\cos\widehat{A})}{S}=\dfrac{P}{S}=\dfrac{۲}{r} \\ r=\dfrac{S}{\frac{P}{۲}}=\dfrac{۲S}{P} \end{cases}$$

توجه کنید که در اینجا $p$ محیط مثلث و $\frac{p}{۲}$ نصف محیط است.

**۱۵** ۴ ۳ ۲ **۱** مطابق شکل نقطهٔ $O$ محل همرسی میانه‌هاست. داریم:




$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

در مثلث $AMN$ ، $AO$ میانه و در مثلث $ABC$ هم $AM'$ میانه است.

پس نسبت تشابه دو مثلث $AMN$ و $ABC$ ، مربع نسبت میانه‌های نظیر است. داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{AO}{AM'})^{۲}\ ,\ \text{محل همرسی میانه‌ها } O \Rightarrow \frac{AO}{AM'}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\Rightarrow S_{MNCB}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AMN}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۵}{۹}S_{ABC}\quad (۱)$$

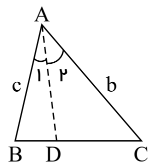
با نوشتن دستور هرون داریم:

$$P_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۳+۷+۸}{۲}=۹\ ,\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\sqrt{۹\times(۹-۳)(۹-۷)(۹-۸)}=۶\sqrt{۳}\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow S_{MNCB}=\frac{۵}{۹}\times ۶\sqrt{۳}=\frac{۱۰}{۳}\times\sqrt{۳}=\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$$

**۱۶** ۴ ۳ ۲ **۱** مطابق شکل داریم:

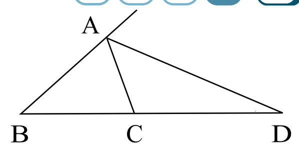
$$\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲\ \Rightarrow \begin{cases} BD=۲R_۱\times\sin\widehat{A}_۱ \\ CD=۲R_۲\times\sin\widehat{A}_۲\end{cases}\Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{R_۱}{R_۲}$$




از طرفی طبق قضیهٔ نیمساز داریم:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{R_۱}{R_۲}=\frac{c}{b}$$

**۱۷** **۴** ۳ ۲ ۱ طبق خاصیت نیمسازهای خارجی مثلث داریم:




$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{\overbrace{BD-CD}^{BC}}{CD}=\frac{AB-AC}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{۸}{CD}=\frac{۶}{۴}\Rightarrow CD=\frac{۳۲}{۶}=\frac{۱۶}{۳}$$

**۱۸** ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم موقعی محل همرسی ارتفاع‌ها خارج از مثلث است که یک زاویهٔ آن منفرجه باشد. زمانی که یک زاویهٔ منفرجه باشد، مربع ضلع مقابل به آن زاویه از مجموع مربعات دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است. داریم:

$$m>۰\ ,\ m-۲>۰\Rightarrow m>۲\ \Rightarrow\ m>۲\quad (۱)$$

ضلع به طول $M$ (توجه کنید که $m>\sqrt{۳}$) بزرگ‌ترین ضلع مثلث است و داریم:

$$\begin{cases} a=m-۲\Rightarrow a^{۲}=m^{۲}-۴m+۴ \\ b=m\Rightarrow b^{۲}=m^{۲} \\ c=\sqrt{۳}\ \Rightarrow\ c^{۲}=۳\end{cases}\ \Rightarrow\ m^{۲}>m^{۲}-۴m+۴+۳$$

$$۴m>۷\Rightarrow m>\frac{۷}{۴}\quad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $m>۲$

**۱۹** ۴ **۳** ۲ ۱ طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}}=\frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}=\frac{\sin ۳\hat{A}}{\sin \hat{A}}$$

طبق فرمول $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^{۳}\alpha$ داریم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}=\frac{۳\sin \hat{A}-۴\sin^{۳}\hat{A}}{\sin \hat{A}}=۳-۴\sin^{۲}\hat{A}=۳-۴(\frac{\sqrt{۲}}{۴})^{۲}=۳-۴(\frac{۲}{۱۶})=۲/۵$$

۲۰ ۴ ۳ ۲ **۱** در مثلث $ABC$، زاویهٔ $\hat{A}$ برابر است با $۱۸۰^{\circ}-(۳۰^{\circ}+۴۵^{\circ})=۱۰۵^{\circ}$. حال در این مثلث قضیهٔ سینوس‌ها را بین اضلاع $AB$ و $BC$ می‌نویسیم تا $AB$ به دست آید:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}}=\frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{۱۹/۲}{\underbrace{\sin ۱۰۵^{\circ}}_{۰/۹۶}}=\frac{c}{\sin ۳۰^{\circ}} \Rightarrow ۲۰=\frac{c}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow c=۱۰=AB$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه $ABH$، ضلع $BH$ مجاور به زاویهٔ $۴۵^{\circ}$ بوده و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر وتر است:

$$BH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۰=۵\sqrt{۲}$$

# پاسخ‌نامه کلیدی

| سؤال | گزینه صحیح |
|---|---|
| ۱ | ۳ |
| ۲ | ۴ |
| ۳ | ۲ |
| ۴ | ۳ |
| ۵ | ۴ |
| ۶ | ۲ |
| ۷ | ۱ |
| ۸ | ۳ |
| ۹ | ۲ |
| ۱۰ | ۴ |
| ۱۱ | ۲ |
| ۱۲ | ۳ |
| ۱۳ | ۱ |
| ۱۴ | ۱ |
| ۱۵ | ۱ |
| ۱۶ | ۱ |
| ۱۷ | ۴ |
| ۱۸ | ۲ |
| ۱۹ | ۳ |
| ۲۰ | ۱ |