



نام و نام خانوادگی:

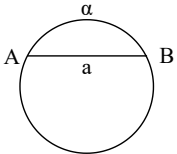
زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه



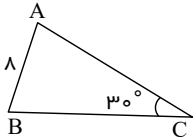
نام آزمون: هندسه یازدهم فصل سوم تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) مطابق شکل در دایره، وتری به طول $AB = a$ ، کمانی به اندازه زاویه α ایجاد کرده است. ثابت کنید: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ (شعاع دایره)

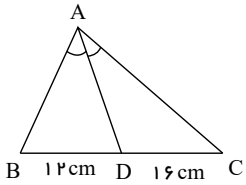


۲) شعاع دایره محیطی مثلث ABC چقدر است؟



۳) در مثلث ABC ، $b = \sqrt{3}a$ و $\hat{A} = 30^\circ$. اگر $c = 4$ باشد، بیشترین مقدار b چقدر است؟

۴) اگر محیط مثلث مقابل 70 cm و AD نیمساز زاویه \hat{A} باشد، طول اضلاع AB و AC را بدست آورید.



۵) به کمک قضیه کسینوسها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

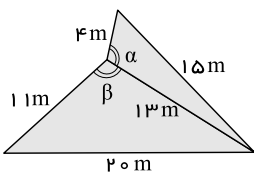
پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

۶) ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۷) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بدست آورید.

۸) دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد زمینها در شکل مشخص شده اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می شود؟

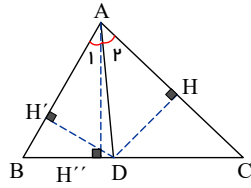
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازد. ($\alpha = \beta$)





۹ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه \hat{A} است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$ ؟



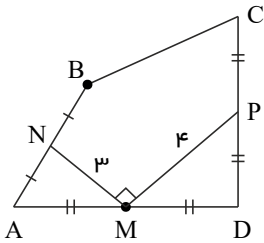
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times \dots}{\frac{1}{2}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (1)$$

ب)

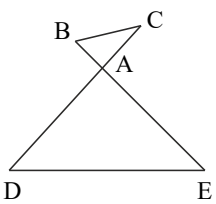
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times \dots}{\frac{1}{2}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

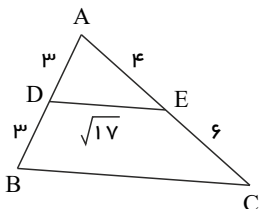
۱۰ مطابق شکل، M, P و N نقاط وسط اضلاع چهارضلعی $ABCD$ هستند و $\hat{NMP} = 90^\circ$. مساحت $ABCD$ چقدر است؟



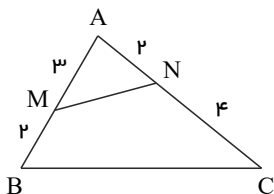
۱۱ در شکل مقابل داریم: $\frac{AC}{AE} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}$ ؛ نسبت مساحت‌های دو مثلث چقدر است؟



۱۲ در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی $BDEC$ چقدر است؟



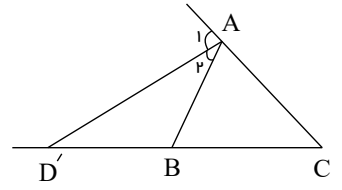
۱۳ در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی چه نسبتی از مساحت مثلث ABC است؟





۱۴ در شکل زیر، نیمساز خارجی زاویه \hat{A} است. ثابت کنید:

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$



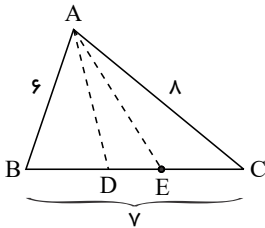
۱۵ در مثلث ABC رابطه $\hat{A} = 2\hat{B}$ برقرار است. ثابت کنید: $a^2 - b^2 = bc$.

۱۶ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات قطرها، برابر با مجموع مربعات چهار ضلع متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

۱۷ در مثلث ABC ، $AB = 3$ و $AC = 4$ و $BC = x - 1$ و $A > 90^\circ$ است. حدود x را مشخص کنید.

۱۸ طول ضلع‌های یک مثلث ۲۵ و ۳۹ و ۴۰ هستند، قطر دایره محیطی آن چقدر است؟

۱۹ در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 7$ هستند. نیمساز AD را رسم می‌کنیم.



الف طول BD و CD را حساب کنید.

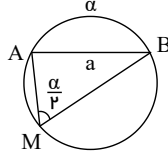
ب طول نیمساز AD را حساب کنید.

پ اگر AE نیمساز زاویه $\hat{D}AC$ باشد، طول AE را حساب کنید.

۲۰ در n ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است. n چقدر است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ مطابق شکل داریم:



$$\hat{M} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{قانون سینوس ها در } \triangle MAB : 2R = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

(R شعاع دایره محیطی $\triangle MAB$)
این شعاع، شعاع دایره نیز می باشد.

۲ طبق قانون سینوس ها داریم:

$$2R = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2R = 16 \Rightarrow R = 8$$

۳

$$b = \sqrt{3}a \Rightarrow \text{قانون سینوس ها} : 2R \sin \hat{B} = \sqrt{3} \times 2R \times \sin \hat{A}$$

$$\sin \hat{B} = \sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ \end{cases}$$

$$c = 2R \times \sin \hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2R \times \sin 90^\circ \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2 \\ 4 = 2R \times \sin 30^\circ \Rightarrow R = 4 \end{cases}$$

$$b = 2R \sin \hat{B} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \\ b = 8 \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

بیشترین مقدار $b = 4\sqrt{3}$ است.

۴

طبق قضیه نیم سازه ها داریم:

$$\text{نیمساز } AD \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC + AB} = \frac{12}{12 + 16} = \frac{3}{7}$$

$$7AB = 3AC + 3AB \Rightarrow 4AB = 3AC \rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC = \frac{3}{4}AC + AC + 28 = 70 \Rightarrow \frac{7}{4}AC = 70 - 28 = 42 \Rightarrow AC = 24 \text{ cm} \Rightarrow AB = \frac{3}{4} \times 24 = 18 \text{ cm}$$

۵

$$\text{الف) } * a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} < 0$$

$$\cos \hat{A} < 0 \Rightarrow -2bc \cdot \cos \hat{A} > 0 \Rightarrow \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}_{a^2} > b^2 + c^2$$

$$\text{ب) } * a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} > 0$$

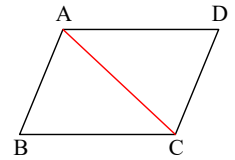
$$\cos \hat{A} > 0 \Rightarrow -2bc \cdot \cos \hat{A} < 0 \Rightarrow \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}_{a^2} < b^2 + c^2$$

$$\text{پ) } * \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۶



$$\begin{cases} S_{ABCD} = 2 \times S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} \end{cases}$$



$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} \Rightarrow S_{ABCD} = AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

$$P = \frac{a + a + a}{2} = \frac{3}{2}a$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}a \left(\frac{3}{2}a - a\right) \left(\frac{3}{2}a - a\right) \left(\frac{3}{2}a - a\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$P_1 = \frac{15 + 4 + 13}{2} = 16$$

$$S_1 = \sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)}$$

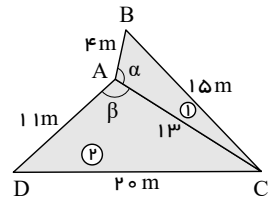
$$S_1 = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24$$

$$P_2 = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22, \quad S_2 = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)}$$

$$\Rightarrow S_2 = \sqrt{22 \times 2 \times 11 \times 9} = 2 \times 3 \times 11 = 66$$

$$S_{ABCD} = 66 + 24 = 90$$

۸ طبق رابطه مساحت در هرون داریم:



با نوشتن قضیه کسینوسها داریم:

$$(1) : 15^2 = 4^2 + 13^2 - 2 \times 4 \times 13 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 225 = 16 + 169 - 104 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-40}{104} = \frac{-5}{13}$$

$$(2) : 20^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \times 11 \times 13 \times \cos \beta \Rightarrow 400 = 121 + 169 - 286 \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{-110}{286} = \frac{-5}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{الف) } \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \quad \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ, \quad AD : \text{وتر مشترک} \Rightarrow \triangle ADH \cong \triangle ADH' \Rightarrow DH = DH'$$

$$\text{ب) } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times DH' \cdot AB}{\frac{1}{2} \times DH \cdot AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\text{پ) } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \cdot AH''}{\frac{1}{2} \times CD \cdot AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\begin{cases} \triangle ADC : \frac{DP}{DC} = \frac{DM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{عکس تالس} : MP \parallel AC, \quad \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 8 \\ \triangle ABD : \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{عکس تالس} : MN \parallel BD, \quad \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 6 \\ AC \text{ و } BD \text{ زاویه بین } \alpha = 90^\circ \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 90^\circ = 24$$

۷

۸

۹

۱۰ قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم:

۱۱



رابطه سینوسی مساحت : $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} \times AD \times AE \times \sin \hat{A}} = \frac{AB}{AD} \times \frac{AC}{AE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

۱۲

قانون کسینوس ها : $DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \times \cos \hat{A}$

$17 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

رابطه سینوسی مساحت : $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AD \times AE \times \sin \hat{A} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \underbrace{\sin \hat{A}}_{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 4\sqrt{2}$

رابطه سینوسی مساحت : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \underbrace{\sin \hat{A}}_{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 20\sqrt{2}$

$S_{BDEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} \Rightarrow S_{BDEC} = 20\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

۱۳

رابطه سینوسی مساحت : $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin \hat{A}} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN}$

$\Rightarrow S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{5} S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{S_{BMNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{5}$

$\begin{cases} BE \parallel AD' \text{ و } AB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_2, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ BE \parallel AD' \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow AE = AB$

$BE \parallel AD' \xrightarrow{\text{ثلث}} \frac{D'B}{D'C} = \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC}$

نیمساز $AD \Rightarrow \hat{CAD} = \hat{DAB} = \hat{B} \Rightarrow AD = BD$

مشترک \hat{C} , $\hat{CAD} = \hat{B} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow CD = \frac{b^2}{a}$ (۱)

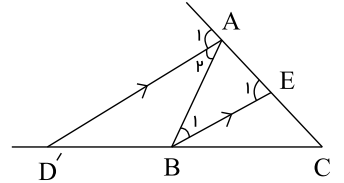
نیمساز AD : $\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{a} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c}$ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow \frac{ab}{b+c} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + bc \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$

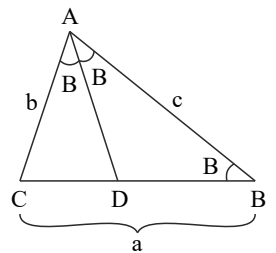
$ABCD$: متوازی الاضلاع $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

$\Rightarrow -\cos \hat{A} = \cos \hat{B}$

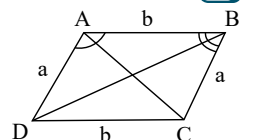
۱۴ مطابق شکل داریم:



۱۵



۱۶





$$\text{در قضیه کسینوس‌ها در } \triangle ABD: BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{A}$$

$$\text{در قضیه کسینوس‌ها در } \triangle ABC: AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \underbrace{\cos \hat{B}}_{-\cos \hat{A}} = a^2 + b^2 + 2ab \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$$

می‌دانیم که: (۱۷)

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + c^2} < a < b + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} < x - 1 < 3 + 4 \Rightarrow 5 < x - 1 < 7 \Rightarrow 6 < x < 8$$

(۱۸)

$$P = \frac{40 + 39 + 25}{2} = \frac{104}{2} = 52$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{52 \times 12 \times 13 \times 27} \Rightarrow S = 9 \times 13 \times 4$$

$$\text{می‌دانیم: } R = \frac{abc}{4S} = \frac{25 \times 39 \times 40}{4 \times 9 \times 13 \times 4} = \frac{125}{6}$$

$$R = \frac{125}{6} \Rightarrow 2R = \frac{125}{3}$$

(۱۹)

با نوشتن قضیه نیمسازها داریم:

الف)

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{3}{4}CD \quad (1)$$

$$BC = 7 = BD + CD \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$7 = \frac{3}{4}CD + CD \Rightarrow \frac{7}{4}CD = 7 \Rightarrow CD = 4 \Rightarrow BD = 3$$

ب)

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD \Rightarrow AD^2 = 6 \times 8 - 3 \times 4 \Rightarrow AD = 6$$

برای محاسبه طول نیمساز AD داریم:

ب)

$$\begin{cases} \frac{DE}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow DE = \frac{3}{4}CE \\ CD = 4 = DE + CE \end{cases}$$

$$4 = \frac{3}{4}CE + CE = \frac{7}{4}CE \Rightarrow CE = \frac{16}{7}$$

$$DE = \frac{3}{4} \times \frac{16}{7} = \frac{12}{7}$$

$$AE^2 = AD \times AC - DE \times CE = 6 \times 8 - \frac{12}{7} \times \frac{16}{7} = 48 - \frac{192}{49} = \frac{2160}{49}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2160}}{7}$$

(۲۰) در n ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر، قطری است که نزدیک‌ترین رأس‌ها را به هم وصل می‌کند، بنابراین داریم:

$$\text{در } \triangle ABC: (\sqrt{2} + \sqrt{2}a)^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \times \cos \hat{A} \Rightarrow (2 + \sqrt{2})a^2 = 2a^2(1 - \cos \hat{A})$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 135^\circ, \hat{A} = 180^\circ - \frac{36^\circ}{n} \Rightarrow 180^\circ - \frac{36^\circ}{n} = 135^\circ \Rightarrow \frac{36^\circ}{n} = 45^\circ \Rightarrow n = 8$$

