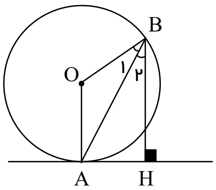
نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۲۰دقیقه

نام آزمون: هندسه یازدهم آزمون جامع تشریحی

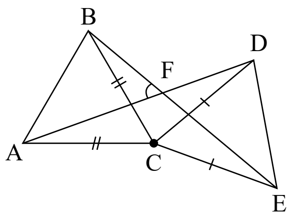
تاریخ آزمون:

۱) در شکل مقابل ثابت کنید: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

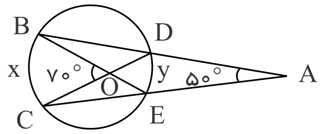


۲) در شکل روبه‌رو، مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEC}$ متساوی‌الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت نقطهٔ A بر B و نقطهٔ D بر E تصویر می‌شود؟

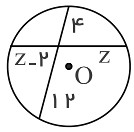
ب) با استفاده از ویژگی‌های تبدیل قسمت (الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $A\hat{F}B = 60^\circ$.



۳) با توجه به شکل‌های زیر اندازهٔ x و y را در شکل (الف) و اندازهٔ z را در شکل (ب) تعیین کنید.



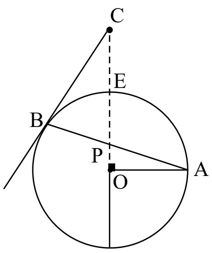
شکل (الف)



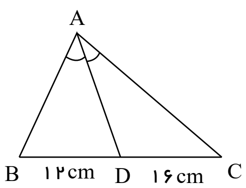
شکل (ب)

۴) ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

۵) در دایرهٔ مقابل به مرکز O ثابت کنید: $BC = CP$



۶) اگر محیط مثلث مقابل $70cm$ و AD نیم‌ساز زاویهٔ $\hat{A}$ باشد، طول اضلاع AB و AC را بدست آورید.



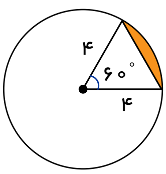
۷) در مثلث ABC داریم: $AB = 10$، $AC = 6$ و $\hat{A} = 60^\circ$.

الف) طول BC را به‌دست آورید.

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

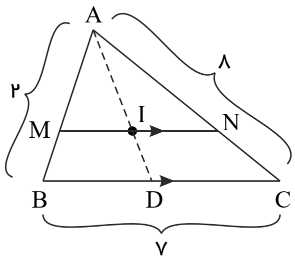
پ) مقدار $\sin \hat{B}$ را پیدا کنید.

۸) در دایرهٔ روبه‌رو به شعاع ۴، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده را محاسبه کنید. (این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.)

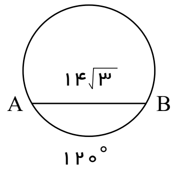


۹ بیشترین مساحت مثلث با طول دو ضلع ۴ و ۱۲ چقدر است؟

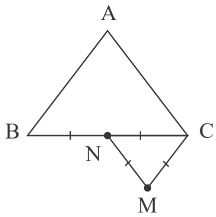
۱۰ در شکل مقابل، I محل همرسی نیمسازهاست. حاصل $\dfrac{S_{MNCB}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$ چقدر است؟ $(MN \parallel BC)$



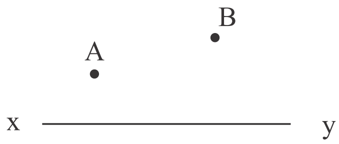
۱۱ در شکل مقابل، شعاع دایره را حساب کنید.



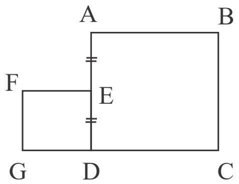
۱۲ مطابق شکل با ترکیب کدام تبدیل‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع MNC است؟



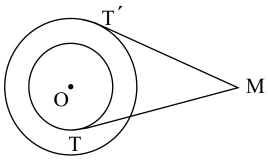
۱۳ مطابق شکل می‌خواهیم نقطهٔ M را بر xy بیابیم که $B\hat{M}y = A\hat{M}x$ باشد. از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟



۱۴ مطابق شکل $ABCD$ و $EFGD$ مربع هستند و E وسط AD است. با ترکیب کدام تبدیل‌ها، $ABCD$ تصویر $EFGD$ است؟

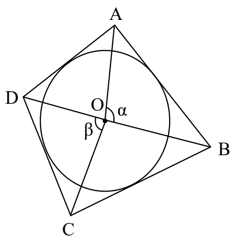


۱۵ دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های R و $۳R$ مفروض هستند. مطابق شکل، از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دو دایره رسم شده است. اگر $MT' = ۲R$ باشد، MT چند است؟



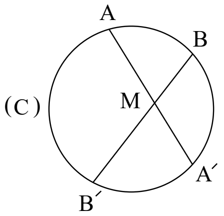
۱۶ چهارضلعی $ABCD$ محیطی است و O مرکز دایره است.

ثابت کنید: $\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$

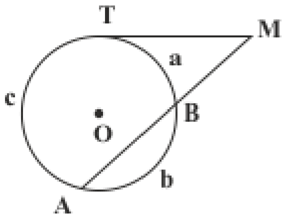


۱۷ دو دایره مماس خارج به شعاع‌های $R_۱ = ۸$ و $R_۲ = ۲$ مفروض هستند؛ اگر TT' مماس مشترک و O و O' مراکز دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

۱۸ قضیه: از نقطهٔ M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند، ثابت کنید: $MA \times MA' = MB \times MB'$



۱۹ خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB در نقطهٔ M متقاطع هستند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$, $\overset{\frown}{BA} = b$, $\overset{\frown}{AT} = c$:



الف اندازهٔ زاویهٔ M را در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

۱. $c = ۱۵۰^\circ \ , \ a = ۶۰^\circ$

۲. $b = ۱۲۰^\circ \ , \ c = ۲۰۰^\circ$

۳. $c - a = ۷۴^\circ$

۴. $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷}$

ب تعیین کنید:

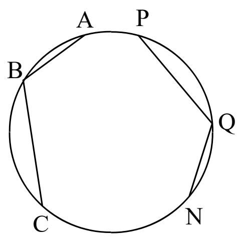
۱. a را در صورتی که $\hat{M} = ۴۵^\circ , c = ۲۰۰^\circ$ باشد.

۲. c را در صورتی که $\hat{M} = ۳۰^\circ , a = ۵۵^\circ$ باشد.

۳. a را در صورتی که $\hat{M} = ۴۵^\circ , c = ۳a$ باشد.

۴. a را در صورتی که $\hat{M} = ۶۰^\circ \ , \ b = ۱۰۰^\circ$ باشد.

۲۰ در شکل مقابل، $AB = QN$ و $BC = PQ$ است. ثابت کنید چهارضلعی $APNC$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.



پاسخنامه تشریحی

۱ شعاع در نقطهٔ تماس بر مماس عمود است. داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}=۹۰^\circ , \hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow OA||BH \Rightarrow O\hat{A}B=\hat{B}_۲ \\ OA=OB \Rightarrow O\hat{A}B=\hat{B}_۱ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲$$

۲

$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow A\hat{C}B=۶۰^\circ \quad , \quad AC=CB$$

الف) پس می‌توان گفت که نقطهٔ B دوران‌یافتهٔ A به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° است. به همین ترتیب:

$$\overset{\triangle}{CDE} \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow D\hat{C}E=۶۰^\circ \quad , \quad CD=CE$$

نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ E دوران‌یافتهٔ D به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° است.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که AD تحت دوران به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° روی BE تصویر می‌شود. دوران طولپا است، پس $AD=BE$. همچنین می‌دانیم که زاویهٔ بین خط و دوران‌یافتهٔ آن به اندازهٔ دوران است، پس: $A\hat{F}B=۶۰^\circ$.

$$\begin{cases} T(A)=B \\ T(D)=E \end{cases} \rightarrow T(AD)=BE$$

۳

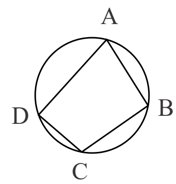
الف) طبق شکل داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{۲}=۷۰^\circ \\ \dfrac{x-y}{۲}=۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۲۰^\circ \\ y=۲۰^\circ \end{cases}$$

ب) طبق روابط طولی داریم:

$$z(z-۲)=۴\times ۱۲ \Rightarrow z^۲-۲z-۴۸=۰ \Rightarrow z=-۶ \text{ غ.ق.ق} \quad , \quad z=۸ \text{ ق.ق}$$

۴ با توجه به تعریف چهارضلعی محاطی داریم:



$$\widehat{B}+\widehat{D}=\frac{A\widehat{D}C}{۲}+\frac{A\widehat{B}C}{۲} \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{D}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

به روش مشابه ثابت می‌شود: $\widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$

۵ از O به B وصل می‌کنیم. شعاع OB در B بر مماس BC عمود است. پس:

$$\begin{cases} P\hat{B}C=۹۰^\circ-O\hat{B}A \\ OA=OB \Rightarrow O\hat{B}A=O\hat{A}B \Rightarrow P\hat{B}C=۹۰^\circ-O\hat{A}B=O\hat{P}A \Rightarrow P\hat{B}C=B\hat{P}C \Rightarrow BC=CP \\ O\hat{P}A=۹۰^\circ-O\hat{A}B \end{cases}$$

۶

طبق قضیهٔ نیمسازها داریم:

$$AD \text{ نیمساز} \rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC+AB}=\frac{۱۲}{۱۲+۱۶}=\frac{۳}{۷}$$

$$۷AB=۳AC+۳AB \Rightarrow ۴AB=۳AC \rightarrow AB=\frac{۳}{۴}AC$$

$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ محیط}=AB+AC+BC=\frac{۳}{۴}AC+AC+۲۸=۷۰ \Rightarrow \frac{۷}{۴}AC=۷۰-۲۸=۴۲ \Rightarrow AC=۲۴cm \Rightarrow AB=\frac{۳}{۴}\times ۲۴=۱۸cm$$

۷

الف) $BC^۲=۶^۲+۱۰^۲-۲\times ۶\times ۱۰\times \underbrace{\cos ۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}=۳۶+۱۰۰-۶۰=۷۶ \Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۹}$

ب) $S=\dfrac{۱}{۲}\times AB\times AC\times \sin ۶۰^\circ=\dfrac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰\times \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۵\sqrt{۳}$

پ) $S=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۲\sqrt{۱۹}\times \sin\hat{B}=۱۵\sqrt{۳}\Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}}$

۸

$S'=$ (هاشور زده) $S($قطاع $۶۰^\circ) - S($مثلث$)$ $S=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\times\pi\times ۴^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۴^۲=\frac{۸}{۳}\pi-۴\sqrt{۳}$

۹

رابطهٔ سینوسی مساحت : $S=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۲\times \sin\hat{A}$

بیشترین مقدار مساحت زمانی است که $\sin\hat{A}=۱$ باشد. داریم:

$\max(S)=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۲=۲۴$

۱۰ مطابق شکل، AD نیمساز است. داریم:

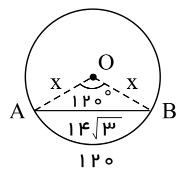
$$\frac{BD}{DC}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{BD}{۷}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow BD=\frac{۷}{۵}$$

$$\overset{\triangle}{ABD}:\quad \text{نیمساز}\quad BI\Rightarrow\frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow\frac{AI}{DI}=\frac{۲}{\frac{۷}{۵}}=\frac{۱۰}{۷}\Rightarrow\frac{AI}{AD}=\frac{۱۰}{۱۷}$$

$$MN\parallel BC\Rightarrow \overset{\triangle}{AMN}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۱۰}{۱۷})^۲=\frac{۱۰۰}{۲۸۹}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{MNCB}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=۱-\frac{۱۰۰}{۲۸۹}=\frac{۱۸۹}{۲۸۹}$$

۱۱ با توجه به شکل داریم:

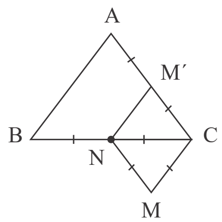


قضیهٔ کسینوس‌ها: $(۱۴\sqrt{۳})^۲=x^۲+x^۲-۲\times x\times x\times \underbrace{\cos ۱۲۰^\circ}_{\frac{-۱}{۲}}$

$\Rightarrow ۱۴^۲\times ۳=۲x^۲+x^۲=۳x^۲\Rightarrow x^۲=۱۴^۲\Rightarrow x=۱۴$

۱۲

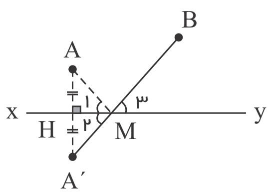
مطابق شکل، $M'\overset{\triangle}{N}C$ بازتاب محوری $M\overset{\triangle}{N}C$ نسبت به محور BC است. از آنجا که:



$$\begin{cases} CM'=CN=\frac{BC}{۲}\Rightarrow CM'=\frac{AC}{۲} \\ CN=\frac{BC}{۲}\end{cases}\Rightarrow \text{عکس تالس}: M'N||AB\Rightarrow\frac{CA}{CM'}=\frac{CB}{CN}=۲$$

پس $N\overset{\triangle}{M'}C$ با تجانس به مرکز C و نسبت $k=۲$، به $\overset{\triangle}{ABC}$ تصویر می‌شود.

۱۳ مطابق شکل بازتاب A نسبت به محور xy نقطهٔ A' می‌باشد. $A'B$، xy را در M قطع می‌کند.

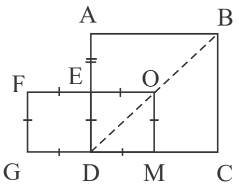


داریم:

$AH=A'H\quad,\quad \hat{H}=۹۰^\circ\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\quad,\quad \hat{M}_۲=\hat{M}_۳\Rightarrow\hat{M}_۱=\hat{M}_۳$

۱۴

مطابق شکل، مربع $OEDM$ بازتاب محوری $EFGD$ نسبت به محور AD می‌باشد.



از آنجا که CD و BD و AD در D همرسند و داریم: $\frac{AD}{DE}=\frac{DB}{OD}=\frac{CD}{DM}=۲$، پس $ABCD$ مجانس $OEDM$ به مرکز تجانس D و ضریب ۲ می‌باشد.
همچنین می‌توان با دوران $EFGD$ به مرکز D و زاویهٔ -۹۰°، $OEDM$ را به‌وجود آورد و سپس با تجانس به مرکز D و ضریب ۲، $k=۲$، آن را بر $ABCD$ تصویر کرد.

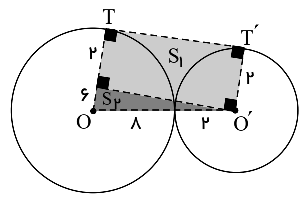
۱۵ طبق روابط طولی داریم:

$$MT^{۲}=MO^{۲}-R^{۲}$$
$$MT'^{۲}=MO^{۲}-(۳R)^{۲}=MO^{۲}-۹R^{۲}$$
$$\Rightarrow MT^{۲}-MT'^{۲}=MO^{۲}-R^{۲}-MO^{۲}+۹R^{۲}=۸R^{۲}$$
$$MT'=۲R\Rightarrow MT^{۲}-۴R^{۲}=۸R^{۲}\Rightarrow MT^{۲}=۱۲R^{۲}\Rightarrow MT=\sqrt{۱۲}R$$

۱۶ $ABCD$ محیطی است و O محل همرسی نیمسازهای زوایای $ABCD$ است. داریم:

$$O\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{۲}\,,\,O\hat{B}A=\frac{\hat{B}}{۲}\Rightarrow \alpha=۱۸۰^\circ-(O\hat{A}B+O\hat{B}A)=۱۸۰^\circ-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$$
$$O\hat{C}D=\frac{\hat{C}}{۲}\,,O\hat{D}C=\frac{\hat{D}}{۲}\Rightarrow \beta=۱۸۰^\circ-(O\hat{C}D+O\hat{D}C)=۱۸۰^\circ-\frac{\hat{D}+\hat{C}}{۲}$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=۳۶۰^\circ-\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{۲}=۳۶۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

۱۷ با توجه به شکل داریم:



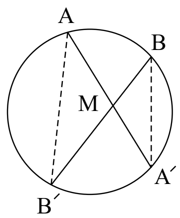
$$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R_{۱}-R_{۲})^{۲}}=\sqrt{۱۰^{۲}-۶^{۲}}=۸$$

مساحت ذوزنقهٔ $OO'T'T$ برابر است با:

$$OT\parallel O'T',OT=۸,O'T'=۲,TT'=۸$$
$$S_{OO'T'T}=\frac{(۲+۸)\times ۸}{۲}=۴۰$$

۱۸ برهان: از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم، دو مثلث AMB' و BMA' متشابه هستند. زیرا:

$$\begin{cases}A\hat{M}B'=A'\hat{M}B\\ \hat{A}=\hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}\Rightarrow MA\times MA'=MB\times MB'$$



۱۹

الف

$$۱)\ \hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۱۵۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$
$$۲)\ b+c+a=۳۶۰^\circ\Rightarrow a=۴۰^\circ$$
$$\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۰۰^\circ-۴۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$$
$$۳)\ \hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۷۴^\circ}{۲}=۳۷^\circ$$
$$۴)\ a=x\Rightarrow\begin{cases}b=۴x\\ c=۷x\end{cases}\Rightarrow x+۴x+۷x=۳۶۰^\circ\Rightarrow x=۳۰^\circ$$
$$\begin{cases}a=۳۰^\circ\\ c=۷\times ۳۰^\circ=۲۱۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۱۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

ب

$$1)\ \hat{M}=\frac{c-a}{2}\Rightarrow 45=\frac{200^\circ-a}{2}\Rightarrow a=110^\circ$$

$$2)\ \hat{M}=\frac{c-a}{2}\Rightarrow 30^\circ=\frac{c-55^\circ}{2}\Rightarrow c=115^\circ$$

$$3)\ \hat{M}=\frac{c-a}{2}\Rightarrow 45^\circ=\frac{3a-a}{2}\Rightarrow a=45^\circ$$

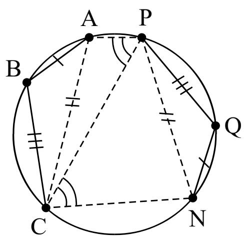
$$4)\ a+b+c=360^\circ\Rightarrow a+c=260^\circ$$

$$\hat{M}=\frac{c-a}{2}\Rightarrow 60^\circ=\frac{c-a}{2}\Rightarrow c-a=120^\circ$$

$$\begin{cases}a+c=260^\circ\\ c-a=120^\circ\end{cases}\Rightarrow 2c=380^\circ\Rightarrow c=190^\circ\Rightarrow a=70^\circ$$

۲۰

می‌دانیم در هر دایره، اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها هم برابرند و بالعکس.



بنابراین مطابق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases}AB=QN\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{QN}\\ BC=PQ\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{PQ}\end{cases}\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{PQN}\Rightarrow AC=PN\quad (1)$$

از طرفی برای زوایای محاطی $A\hat{P}C$ و $P\hat{C}N$ داریم:

$$A\hat{P}C=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}\ ,\ P\hat{C}N=\frac{\overset{\frown}{PQN}}{2}\Rightarrow A\hat{P}C=P\hat{C}N\Rightarrow AP\parallel CN\quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی $APNC$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.