نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: مثلثات یازدهم تجربی (تشریحی)

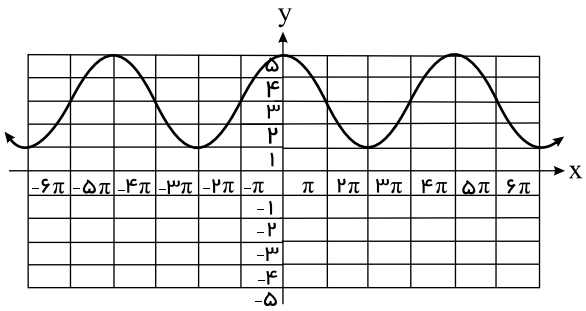
تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف برد تابع $y = \tan x$ برابر ..... است.

۲ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y = a\cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.



۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف

$T = \pi \quad , \quad Max = ۳ \quad , \quad Min = -۳$

ب

$T = ۳ \quad , \quad Max = ۹ \quad , \quad Min = ۳$

پ

$T = ۴\pi \quad , \quad Max = -۱ \quad , \quad Min = -۷$

ت

$T = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad Max = ۱ \quad , \quad Min = -۱$

۴ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

ب

$\cos x = \cos ۲x$

۵ اگر $\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶}$ و $\tan\alpha = \frac{۲m-۱}{۳}$، آنگاه حدود m را بیابید.

۶ اگر $\tan x = ۲m - ۱$ و $\frac{\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۲}$ آنگاه حدود m را بیابید.

۷ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۳\cos^۲ ۲x - ۶$ ب) $g(x) = -\pi\cos^۳ ۴x - \frac{\pi}{۲}$

۸ اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin(mx) + m$ برابر ۴π باشد، ماکزیمم تابع را بیابید. $(m > ۰)$

۹ دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف

$f(x) = ۵\sin(۶x) - ۷$

ب

$g(x) = \frac{۱}{۲}\cos(۳x) + ۴$

۱۰ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف

$y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب

$y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

پ

$y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت

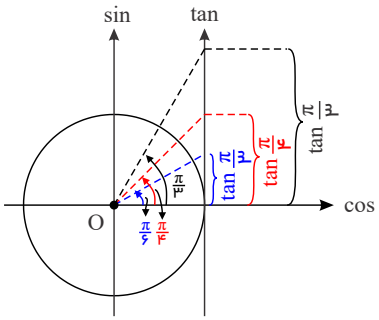
$y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

۱۱ دورهٔ تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -۳\cos(\pi x) + ۱$ را مشخص کنید.

۱۲ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

۱۳ با توجه به شکل مقابل جای خالی را در جملهٔ داده‌شده به‌طور مناسب پر کنید. «اگر زاویهٔ α تنها داخل یک ربع دستگاه مختصات تغییر کند در هر چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی با افزایش زاویهٔ α همواره تانژانت زاویه ..... می‌یابد.»



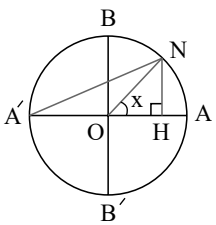
۱۴ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱}$ را بیابید.

۱۵ ضابطهٔ تابع مثلثاتی سینوس با دورهٔ تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.

۱۶ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{۵} - \pi\cos\frac{۱}{۲}x$ را محاسبه کنید.

۱۷ مقدار عددی عبارت $(\frac{۱}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})$ را حساب کنید.

۱۸ با استفاده از شکل داده شده، ابتدا درستی اتحاد مقابل را ثابت کنید.



$\tan\frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$

سپس حاصل $\tan ۲۲٫۵^\circ$ را بیابید.

۱۹ مقدار عددی عبارت $(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})$ را بیابید.

۲۰ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

الف دورهٔ تناوب تابع $y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$ برابر با ..... است.

پاسخ‌نامه تشریحی

۱

الف $(-\infty, +\infty)$

۲

$$c = \frac{۵+۱}{۲} = ۳$$

$$|a| = \frac{۵-۱}{۲} = ۲ \ , a > ۰ , a = ۲$$

$$\Rightarrow \text{دوره تناوب} : T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y = ۲\cos(\frac{x}{۲}) + ۳ \quad \text{یا} \quad y = ۲\cos(-\frac{x}{۲}) + ۳$$

۳

الف

تابع مثلثاتی را $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

$$T = \pi \to \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \to |b| = ۲ \to b = \pm ۲$$

$$\begin{cases} Max = |a| + c = ۳ \\ Min = -|a| + c = -۳ \end{cases} \to c = ۰ \ , \ a = \pm ۳ \xrightarrow{\text{با فرض } b>۰ , a>۰} y = ۳\sin ۲x$$

ب

تابع مثلثاتی را $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

$$T = ۳ \to \frac{۲\pi}{|b|} = ۳ \to |b| = \frac{۲\pi}{۳} \to b = \pm\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} Max = |a| + c = ۹ \\ Min = -|a| + c = ۳ \end{cases} \to c = ۶ \ , \ a = \pm ۳ \xrightarrow{\text{با فرض } b>۰ , a>۰} y = ۳\sin(\frac{۲\pi}{۳})x + ۶$$

پ

تابع مثلثاتی را $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

$$T = ۴\pi \to \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \to |b| = \frac{۱}{۲} \to b = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} Max = |a| + c = -۱ \\ Min = -|a| + c = -۷ \end{cases} \to c = -۴ \ , \ a = \pm ۳ \xrightarrow{\text{با فرض } b>۰ , a>۰} y = ۳\sin(\frac{x}{۲}) - ۴$$

ت

تابع مثلثاتی را $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

$$T = \frac{\pi}{۲} \to \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \to |b| = ۴ \to b = \pm ۴$$

$$\begin{cases} Max = ۱ \to |a| + c = ۱ \\ Min = -۱ \to -|a| + c = -۱ \end{cases} \to c = ۰ \ , \ a = \pm ۱ \xrightarrow{\text{با فرض } b>۰ , a>۰} y = \sin ۴x$$

۴

الف

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

ب

$$\cos x = \cos ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

۵

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

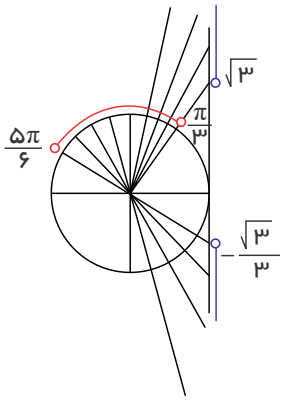
$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶}$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{3} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} > \sqrt{3} \quad \text{یا} \quad \frac{2m-1}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 > 3\sqrt{3} \quad \text{یا} \quad 2m-1 < -\sqrt{3}$$

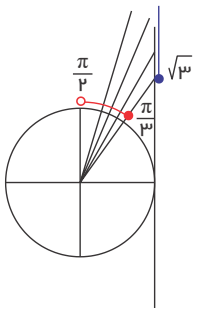
$$\Rightarrow m > \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{یا} \quad m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$



۶ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$ باشد، نگاه تانژانت زاویهٔ x بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{3}$ است.

$$\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x \ge \sqrt{3} \Rightarrow 2m-1 \ge \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2m \ge 1+\sqrt{3} \Rightarrow m \ge \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$



۷

نکته: زوج $n \to 0 \le \sin^n u \le 1$ و $0 \le \cos^n u \le 1$

نکته: فرد $n \to -1 \le \sin^n u \le 1$ و $-1 \le \cos^n u \le 1$

الف) $f(x) = 3\cos^2 2x - 6$

$$0 \le \cos^2 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\cos^2 2x \le 3 \Rightarrow -6 \le 3\cos^2 2x - 6 \le 3 - 6$$

$$\Rightarrow -6 \le f(x) \le -3 \Rightarrow min\ f = -6 \quad \text{و} \quad max\ f = -3$$

ب) $g(x) = -\pi\cos^3 4x - \frac{\pi}{2}$

$$-1 \le \cos^3 4x \le 1 \xrightarrow{\times(-\pi)} \pi \ge -\pi\cos^3 4x \ge -\pi \Rightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \le -\pi\cos^3 4x - \frac{\pi}{2} \le \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le g(x) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow min\ g = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{و} \quad max\ g = \frac{\pi}{2}$$

۸

در تابع $y = a\sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \ , \ max = |a| + c \ , \ min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sin(mx) + m \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2} \Rightarrow max\ f = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۹

در توابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ داریم:

الف

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \ , \ max = |a| + c \ , \ min = -|a| + c$$

$$f(x) = 5\sin(6x) - 7 \to T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$max\ f = |5| - 7 = -2 \ , \ min\ f = -|5| - 7 = -12$$

ب

در توابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \ , \ max = |a| + c \ , \ min = -|a| + c$$

$$g(x) = \frac{۱}{۲}\cos(۳x) + ۴ \to T = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$max\ g = |\frac{۱}{۲}| + ۴ = \frac{۹}{۲} \qquad min\ g = -|\frac{۱}{۲}| + ۴ = -\frac{۱}{۲} + ۴ = \frac{۷}{۲}$$

۱۰

الف

$$y = ۱ + ۲\sin ۷x \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c,\ T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۷|} = \frac{۲\pi}{۷}$$

$$, \quad Max = |۲| + ۱ = ۳ \quad , \quad Min = -|۲| + ۱ = -۱$$

ب

$$y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c,\ T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|} = ۴$$

$$, \quad Max = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳} \quad , \quad Min = -|-۱| + \sqrt{۳} = -۱ + \sqrt{۳}$$

پ

$$y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲ \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c,\ T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = ۴\pi$$

$$, \quad Max = |-\pi| - ۲ = \pi - ۲ \quad , \quad Min = -|-\pi| - ۲ = -\pi - ۲$$

ت

$$y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x \xrightarrow[Max=|a|+c,\ Min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c,\ T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$, \quad Max = |-\frac{۳}{۴}| + ۰ = \frac{۳}{۴} \quad , \quad Min = -|-\frac{۳}{۴}| + ۰ = \frac{-۳}{۴}$$

۱۱ می‌دانیم تابع $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

دورهٔ تناوب: $T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

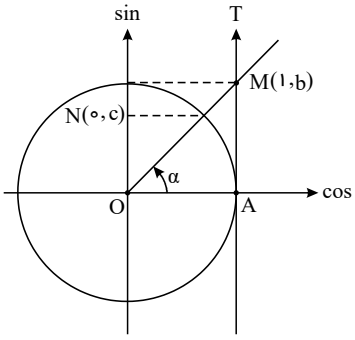
ماکزیمم: $\max = |-۳| + ۱ = ۴$

مینیمم: $\min = -|-۳| + ۱ = -۲$

۱۲ الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ اول در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\sin\alpha = ON = y_N = c > ۰$$
$$\tan\alpha = AM = y_M = b > ۰$$



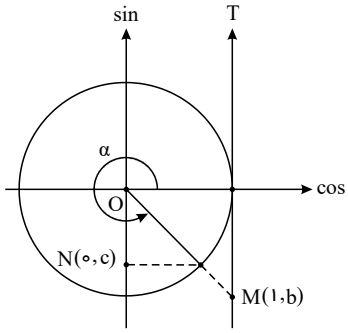
از روی شکل واضح است که:

$$c < b \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$$

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\sin\alpha = y_N = c < ۰$$
$$\tan\alpha = y_M = b < ۰$$

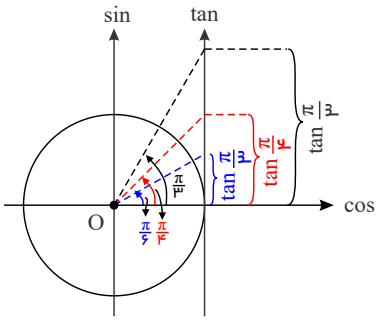


از روی شکل واضح است که:

$$b < c \Rightarrow \tan\alpha < \sin\alpha$$

۱۳

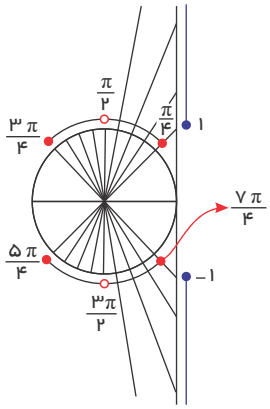
افزایش



۱۴

$$f(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱} \Rightarrow \tan^۲ x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \tan^۲ x \geq ۱ \Rightarrow |\tan x| \geq ۱$$
$$\Rightarrow \tan x \leq -۱ \quad \text{یا} \quad \tan x \geq ۱$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.



$$\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۵\pi}{۴} \leq x \leq \frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳\pi}{۲}$$

در حالت کلی داریم:

$$۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\le x\le ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}\le x\le ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

۱۵

$$\text{دورهٔ تناوب}: T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow ۳=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$|a|=۱\ ,\ c=۴\Rightarrow y=\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۴ \text{ یا } y=-\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۴$$

۱۶ می‌دانیم: در تابع $y=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$y=\sqrt{۵}-\pi\cos\frac{۱}{۲}x$$

$$\text{ماکزیمم: } \max(y)=\pi+\sqrt{۵}$$

$$\text{مینیمم: } \min(y)=-\pi+\sqrt{۵}$$

$$\text{دورهٔ تناوب: } T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

۱۷

$$A=(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۵\pi}{۱۲})$$

$$\text{می‌دانیم}: \frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۶\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۱۲}=\sin\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow A=(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲}+\sin\frac{\pi}{۱۲})\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}-\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}}\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

$$\Rightarrow\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}\Rightarrow\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴})$$

$$A=\frac{-۱}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$$

۱۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ONH}$ داریم:

$$\tan x=\frac{NH}{OH}=\frac{\sin x}{\cos x}$$

از طرفی چون زاویهٔ $N\widehat{A'}A$ محاطی است پس برابر نصف کمان روبه‌رو است یعنی نصف کمان $\widehat{AN}$ یا همان $\widehat{x}$ است لذا: $\widehat{A'}=\frac{\hat{x}}{۲}$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{A'NH}$ داریم:

$$\tan A'=\frac{NH}{A'H}\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$$
$$(A'O=۱, OH=\cos x)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\tan ۲۲٫۵^\circ=\frac{\sin ۴۵^\circ}{۱+\cos ۴۵^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow ۲۲٫۵^\circ=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}}{\frac{۲+\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}$$

$$\text{گویا می‌کنیم}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}\Rightarrow\tan ۲۲٫۵^\circ=\frac{۲\sqrt{۲}-۲}{\cancel{۴}^{۲}}=\sqrt{۲}-۱$$

۱۹

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\cos\frac{۵\pi}{۱۲})$$

می‌دانیم: اگر دو زاویه، متمم یکدیگر باشند سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است لذا داریم:

$$\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۶\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۱۲}=\sin\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\sin\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۲}{۴}-\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}-\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}\quad(۱)$$

از طرفی:

$$\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱-\cos۲(\frac{\pi}{۱۲})}{۲}\Rightarrow\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}$$

$$(۱)\Rightarrow\frac{۱}{۲}-\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}-(\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

۲۰

می‌دانیم دورهٔ تناوب $y=a\cos bx+c$ **برابر است با:** $\frac{۲\pi}{|b|}$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

الف

$$y=۸\cos(\frac{x}{۳})$$

دورهٔ تناوب: $\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}}=۶\pi$