

نام و نام خانوادگی:

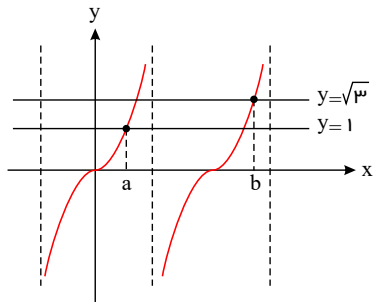
زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

نام آزمون: مثلثات ۱۱ تجربی

تاریخ آزمون:



سید بهروز پرتوی



۱ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{12}$ (۲)

$\frac{\pi}{12}$ (۱)

$\frac{13\pi}{12}$ (۴)

$\frac{7\pi}{12}$ (۳)

۲ خلاصه شده‌ی عبارت $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ کدام است؟

۰ (۴)

$\cos 2\alpha$ (۳)

$\sin 2\alpha$ (۲)

$-\sin 2\alpha$ (۱)

۳ اگر $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ یا -2 (۴)

$-\frac{1}{3}$ یا 2 (۳)

$\frac{1}{2}$ یا -3 (۲)

$-\frac{1}{2}$ یا 3 (۱)

۴ اگر $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3$ باشد، آن گاه حاصل $\sin \theta \cos \theta$ کدام است؟

$0,5$ (۴)

$0,4$ (۳)

$0,3$ (۲)

$0,2$ (۱)

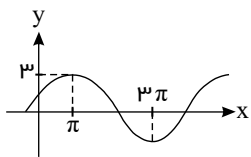
۵ حاصل $\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}$ برابر کدام است؟

$\cot \frac{\alpha}{2}$ (۴)

$\cos \frac{\alpha}{2}$ (۳)

$\tan \frac{\alpha}{2}$ (۲)

$\sin \frac{\alpha}{2}$ (۱)



۶ اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 - a \sin bx$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل ab کدام است؟

۲ (۲)

-۲ (۱)

-۱ (۴)

۱ (۳)

۷ اگر شیب خط $0 = 11 \tan \theta + (5 \cos \theta)y + (3 \sin \theta)x - 11$ برابر ۳ باشد، حاصل $A = \frac{-2 \sin \theta + 7 \cos \theta}{5 \cos \theta + 4 \sin \theta}$ کدام است؟

$\frac{17}{15}$ (۴)

$\frac{-17}{15}$ (۳)

$\frac{3}{25}$ (۲)

$-\frac{3}{25}$ (۱)

۸ اگر $\sin 2x = \frac{2}{3}$ و $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\tan x$ چقدر است؟

$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (۴)

$\frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{5} - 2}{2}$ (۱)

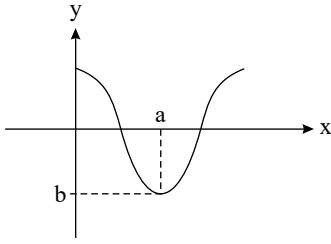
۹ دوره تناوب اساسی تابع $y = \sin^2 2x \cos^2 2x$ چقدر است؟

π (۴)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{\pi}{8}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)



۱۰ در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = 2 \cos^2(\pi x) - 1$ رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۲) $-\frac{1}{2}$
(۴) -1

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۳) 1

۱۱ انتهای کمان α در ناحیه دوم قرار دارد. اگر $\left| \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \right| = \frac{3}{4}$ ، آنگاه حاصل $\cos \alpha - \tan \alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{5}{4\sqrt{7}}$

(۳) $\frac{5}{4\sqrt{7}}$

(۲) $-\frac{1}{5}$

(۱) $\frac{1}{5}$

۱۲ در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه 75° چند سانتی‌متر است؟

(۴) $\frac{5\pi}{3}$

(۳) $\frac{5\pi}{4}$

(۲) $\frac{4\pi}{3}$

(۱) $\frac{5\pi}{6}$

۱۳ نمودار تابع‌های $f(x) = -2 \sin(2x) + 3$ و $g(x) = k$ در بازه $(0, T)$ یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. حدود k کدام است؟ (دوره تناوب تابع f است.)

(۴) $(0, 3) \cup (3, 5)$

(۳) $(0, 3)$

(۲) $(1, 3) \cup (3, 5)$

(۱) $(1, 5)$

۱۴ مقدار عددی $\sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

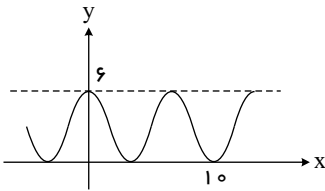
(۴) $\frac{13}{16}$

(۳) $\frac{13}{8}$

(۲) $\frac{3}{16}$

(۱) $\frac{1}{16}$

۱۵ نمودار مقابل مربوط به کدام ضابطه می‌تواند باشد؟



(۲) $y = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{5}x\right) + 3$

(۱) $y = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{5}x\right) + 3$

(۴) $y = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{10}x\right) + 3$

(۳) $y = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{10}x\right) + 3$

۱۶ اگر $\frac{1 - \cot \alpha}{\cot \alpha + 1} = \frac{2}{5}$ باشد، آنگاه حاصل $\cos 2\alpha$ برابر کدام گزینه است؟

(۴) $-\frac{9}{29}$

(۳) $\frac{9}{29}$

(۲) $\frac{20}{29}$

(۱) $-\frac{20}{29}$

۱۷ دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos \pi x}{[x] + [-x]}$ کدام است؟

(۴) دوره تناوب ندارد.

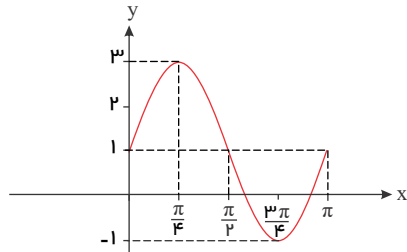
(۳) ۴

(۲) ۲

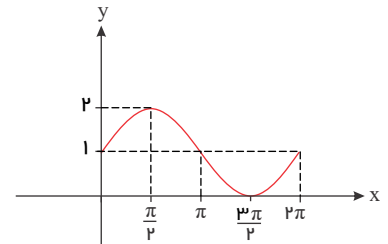
(۱) ۱



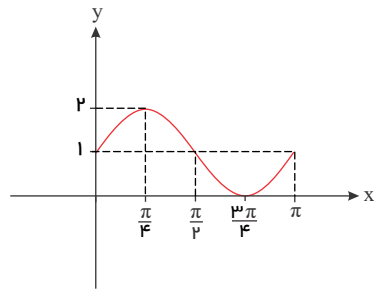
۱۸ نمودار تابع $y = \sin(2x) + 1$ در یک دوره تناوب کدام است؟



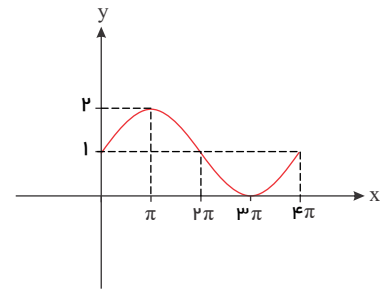
۲



۱



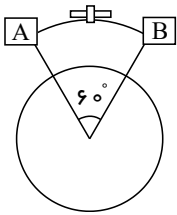
۴



۳

۱۹ ماهواره‌ای مطابق شکل بر روی مدار دایره‌ای شکل به شعاع 500 Km در حال حرکت است. این ماهواره در جابه‌جایی از A به B چه مسافتی را

باید طی کند؟



$\frac{500}{3} \text{ Km}$ ۲

$\frac{500\pi}{3} \text{ Km}$ ۱

$300\pi \text{ Km}$ ۴

30000 Km ۳

۲۰ اگر f تابعی متناوب و دوره تناوب آن ۷ باشد، آنگاه $f(159)$ برابر کدام است؟ ($D_f \in \mathbb{R}$)

$f(5)$ ۴

$f(6)$ ۳

$f(8)$ ۲

$f(7)$ ۱

پاسخنامه تشریحی

با توجه به نمودار تابع $\tan x$, باید $\tan a = 1$ و $a = \frac{\pi}{4}$ است و $\tan b = \sqrt{3}$ در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ است، پس $b = \frac{4\pi}{3}$ بنابراین

$$b - a = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

می‌دانیم: $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) = \cos \alpha (-\sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha$$

$$\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \text{ و } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\tan x = A} \frac{2A}{1 + A^2} + \frac{1 - A^2}{1 + A^2} = -\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2A + 1 - A^2}{1 + A^2} = -\frac{1}{5}$$

$$\rightarrow 10A + 5 - 5A^2 = -1 - A^2 \rightarrow 4A^2 - 10A - 6 = 0 \rightarrow 2A^2 - 5A - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 \rightarrow A_1, A_2 = \frac{5 \pm 7}{4} = 3, -\frac{1}{2} \rightarrow \tan x = 3, -\frac{1}{2}$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 \rightarrow \sin \theta + \cos \theta = 3 \sin \theta - 3 \cos \theta \rightarrow 4 \cos \theta = 2 \sin \theta \rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2$$

$$\rightarrow \tan \theta = 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1 + 4} = \frac{2}{5} = 0,4$$

می‌دانیم $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

$$\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2}$$

فاصله طولی بین دو Max و Min متوالی، نصف دوره تناوب است و در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع از رابطه $Max = |a| + c$ به دست می‌آید.

با توجه به نمودار، از $x = \pi$ تا $x = 3\pi$ نصف دوره تناوب است:

$$\frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$Max = 3 \Rightarrow 1 + |a| = 3 \Rightarrow |a| = 2$$

با توجه به آن که نمودار اطراف مبدأ صعودی است، پس $-a$ و b هم علامت بوده‌اند و در نتیجه a و b مختلف‌العلامت هستند.

$$ab = -\left(\frac{1}{2}\right)(2) = -1$$

$$m = -\frac{A}{B} \text{ می‌دانیم در معادله خط } Ax + By + C = 0 \text{ شیب خط برابر است با:}$$

$$\text{پس: } m = \frac{-3 \sin \theta}{5 \cos \theta} = 3 \rightarrow \frac{-3}{5} \tan \theta = 3 \rightarrow \tan \theta = -5$$

با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر $\cos \theta$ داریم:

$$A = \frac{\frac{-3 \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{5 \cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{5 \cos \theta}{\cos \theta} + \frac{4 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{-3 \tan \theta + 5}{5 + 4 \tan \theta} \xrightarrow{\tan \theta = -5} A = \frac{-2(-5) + 5}{5 + 4(-5)} = \frac{15}{-15} = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

می‌دانیم $\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$ است.

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2}{3}$$

$$\tan x=t \rightarrow \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t^2 + 2 = 6t \Rightarrow 2t^2 - 6t + 2 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \tan x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \tan x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

چون طبق صورت سؤال $0 < x < \frac{\pi}{4}$ است پس $0 < \tan x < 1$ است.

بنابراین تنها $\tan x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

می‌دانیم:

توجه: اگر سینوس و کسینوس توان زوج داشته باشند دوره تناوب آنها نصف می‌شود.

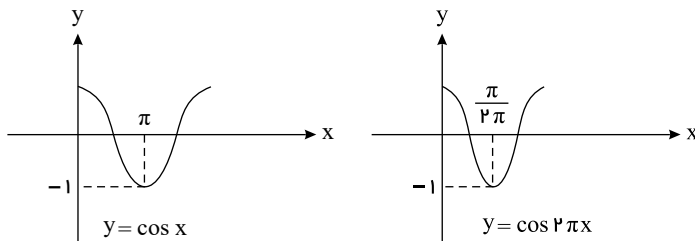
$$y = (\sin 2x \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 4x \rightarrow T = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

نکته: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

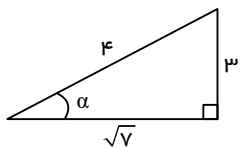
توجه کنید که: $f(x) = 2\cos^2(\pi x) - 1 = \cos(2\pi x)$

بنابراین در نمودار تابع $y = \cos x$ طول نقاط را بر 2π تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید.



بنابراین $a = \frac{1}{2}$ و $b = -1$ در نتیجه: $a + b = -\frac{1}{2}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱



$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \Rightarrow |\sin \alpha| = \frac{3}{4} \xrightarrow[\sin \alpha > 0]{\text{ربع دوم}} \sin \alpha = \frac{3}{4}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

اما در ربع دوم $\tan \alpha < 0$ و $\cos \alpha < 0$ هستند. بنابراین:

$$\cos \alpha - \tan \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} - \left(\frac{-3}{\sqrt{7}}\right) = \frac{-7 + 12}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{4\sqrt{7}}$$

۱۲ ابتدا زاویه 75° را برحسب رادیان می‌یابیم: ۱ ۲ ۳ ۴



$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{75}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$$

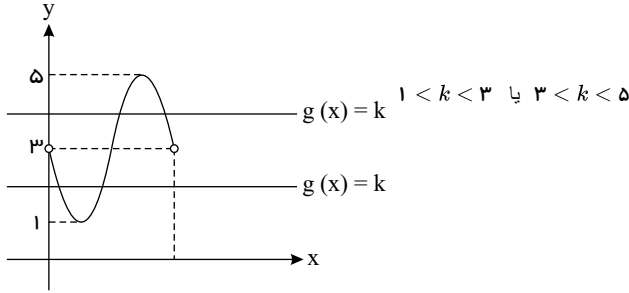
در دایره‌ای به شعاع r طول کمان مقابل به زاویه θ رادیان برابر L است که: $\theta = \frac{L}{r}$ ، بنابراین داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{12} = \frac{l}{3} \Rightarrow l = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$f(x) = -2 \sin(2x) + 3 \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$Max = |-2| + 3 = 1, Min = -|-2| + 3 = 1$$



نمودار f را رسم می‌کنیم.

تابع $g(x) = k$ تابع f را زمانی در دو نقطه قطع می‌کند که داشته باشیم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \text{ می‌دانیم } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 14$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - 3 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right)^2 = 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)^2$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx) + c$ است که با توجه به نمودار، $\frac{3}{4}$ برابر دوره تناوب برابر ۱۰ است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\frac{3}{2} T = 10 \Rightarrow T = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{20}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6\pi}{20} = \frac{3\pi}{10} \Rightarrow b = \pm \frac{3\pi}{10}$$

نقطه برخورد تابع با محور y ها، ماکزیمم تابع است. پس a مثبت است.

$$\left. \begin{aligned} max = 6 &\Rightarrow |a| + c = 6 \\ min = 0 &\Rightarrow -|a| + c = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

در نتیجه:

$$y = 3 \cos\left(\pm \frac{3\pi}{10} x\right) + 3 \Rightarrow y = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{10} x\right) + 3$$

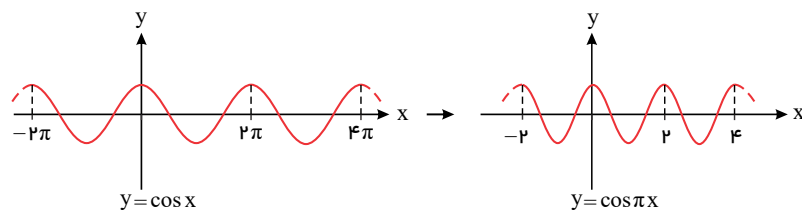
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\frac{1 - \cot \alpha}{\cot \alpha + 1} = \frac{2}{5} \rightarrow 5 - 5 \cot \alpha = 2 \cot \alpha + 2 \rightarrow 7 \cot \alpha = 3 \rightarrow \cot \alpha = \frac{3}{7} \rightarrow \tan \alpha = \frac{7}{3}$$

$$\text{می‌دانیم } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{49}{9}}{1 + \frac{49}{9}} = \frac{40}{58} = \frac{20}{29}$$

ابتدا نمودار $y = \cos \pi x$ را رسم می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

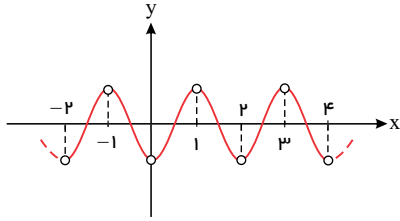


$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ پس دامنه تابع } f(x) \text{ برابر } \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ می‌باشد، بنابراین داریم:}$$

$$f(x) = \frac{\cos \pi x}{[x] + [-x]} \xrightarrow{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}} f(x) = \frac{\cos \pi x}{-1} \Rightarrow f(x) = -\cos \pi x$$

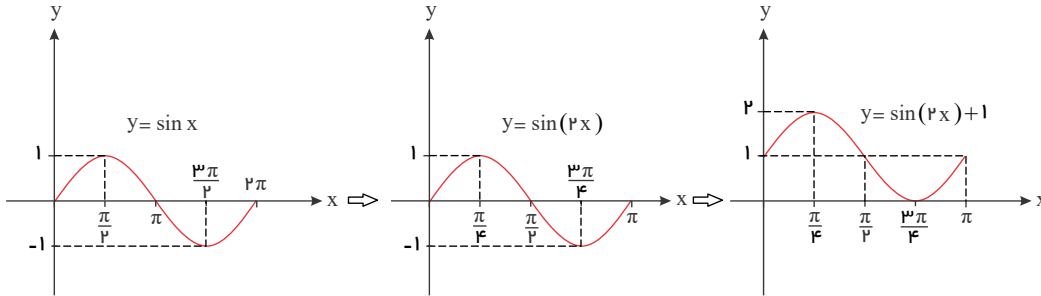


حال نمودار تابع $f(x) = -\cos \pi x$ با شرط $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $T = 2$ است.

در نمودار $y = \sin x$ ابتدا طول نقاط را بر ۲ تقسیم کرده و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. ۱۸ (۱) (۲) (۳) (۴)



اگر طول کمان مقابل به زاویه θ رادیان در دایره‌ای به شعاع r برابر L باشد، داریم: $L = \theta \cdot r$ ۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

زاویه 60° را به رادیان تبدیل می‌کنیم.

$$D = 60^\circ \rightarrow \frac{60}{180} = \frac{\theta}{\pi} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow L = \theta \cdot r = \frac{\pi}{3} \times 500 = \frac{500\pi}{3} \text{ Km}$$

۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم که اگر T دوره تناوب اصلی تابع $f(x)$ باشد آنگاه:

$$f(x + k \cdot T) = f(x)$$

$$f(159) = f(5 + 22 \times 7) = f(5 + 22T) = f(5)$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴