نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۲۵ دقیقه

نام آزمون: مشتق (تستی)

تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^{۳}+bx & ; \quad x<۱ \\ ۲\sqrt{۴x-۳} & ; \quad x\geq ۱ \end{cases}$ ، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲) به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=mx^{۲}+۱$ با خط $g(x)=mx$ تقاطع ندارد؟

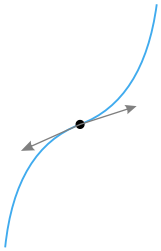
۱) $۰\leq m\leq ۴$ ۲) $۰\leq m<۴$ ۳) $m>۴$ یا $m<۰$ ۴) $m\geq ۰$

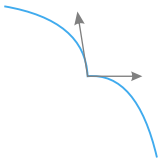
۳) تابع f مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)+۲}{x-۲}=\frac{۱}{۲}$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $y=xf(\sqrt{x})$ در نقطه‌ای به طول $x=۴$ واقع بر آن کدام است؟

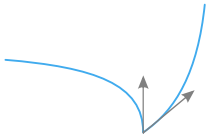
۱) $۲y+۳x+۴=۰$ ۲) $۲y+۳x=۲۲$ ۳) $۲y=۳x+۱۰$ ۴) $۲y=۳x-۲۲$

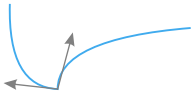
۴) جدول مقابل مقادیر تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ را در همسایگی نقطهٔ $x=۲$ نشان می‌دهد. نمودار تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=۲$ به کدام صورت است؟

x	۱٫۹۹۹۹	۲	۲٫۰۰۰۱
$f(x)$	۴۵	۵	۵٫۰۰۰۱

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵) در تابع $f(x)=(۲+x)(۲^{۲}+x^{۲})(۲^{۴}+x^{۴})\cdots(۲^{۲^{n}}+x^{۲^{n}})$ حاصل $f'(۰)$ کدام است؟

۱) $۲^{۲^{n-۱}}$ ۲) $۲^{۲^{n+۱}}-۲$ ۳) $۲^{۲^{n+۱}-۲}$ ۴) $۲^{۲^{n+۱}}-۱$

۶) اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۳} & |x|\geq ۱ \\ ۲x^{۲}-۱ & |x|<۱ \end{cases}$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۱-h)-f(۱)}{۲h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷) نقطهٔ A روی منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $B(۲,۰)$ تابعی از طول نقطهٔ A است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این فاصله وقتی طول نقطهٔ A برابر ۳ است، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰٫۲۵ ۳) ۰٫۷۵ ۴) ۰٫۵

۸) اگر $f(x)=(x-۱)\sqrt{۲x^{۳}+۶x^{۲}}$ باشد، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۹) تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+h)-۹}{h}=\dfrac{۳}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۲٫۵ ۲) ۳ ۳) ۳٫۵ ۴) ۴

۱۰) فرض کنیم تابع $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ از مرتبه‌ی دوم مشتق پذیر باشد و برای هر x از اعداد حقیقی داشته باشیم $h(x)=f(۱-۴x^۲)$ و $f'(۱)=۱$، آن‌گاه $h''(۰)$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۸ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۱) در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در بازهٔ $[۱,۱٫۴۴]$ از آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع در ابتدای این بازه، چقدر کم‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۲۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴۴}$

۱۲) حجم آب باقی‌مانده در ظرفی که در انتهای آن سوراخی وجود دارد در زمان t از رابطهٔ $f(t)=۴۰(۱-\dfrac{mt^۳}{۳})$ به‌دست می‌آید. اگر آهنگ لحظه‌ای کاهش حجم آب در لحظه $t=۲$ برابر -۴۰ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۲

۱۳) در نقطهٔ A به طول a واقع بر نمودار تابع $y=x^۲+۵x+۷$ مماسی بر منحنی رسم کرده‌ایم. اگر تانژانت زاویهٔ بین مماس و محور طول‌ها ۵ باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) ۵, ۱ ۲) ۰, -۱ ۳) -۵, ۰ ۴) ۵, ۲

۱۴) معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=|x^۲-۲|$ در نقطه‌ای به طول یک واقع بر نمودار، کدام است؟

۱) $۲x+y=۳$ ۲) $x+۲y=۳$ ۳) $۳x-y=۲$ ۴) $۳y-x=۲$

۱۵) مشتق $y=(۱+\tan^۲x)\sin ۲x$ چند برابر $\dfrac{۱}{\cos^۲x}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

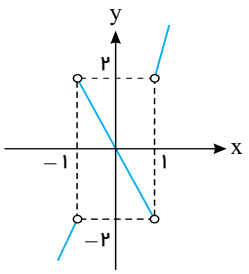
۱۶) خط $y+۲x=۶$ بر نمودار تابع f در $x=۱$ مماس است. اگر داشته باشیم $g(۳x-۱)=f^۲(\sqrt{x})+\sqrt{f(x)}$، شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول $x=۱$ کدام است؟

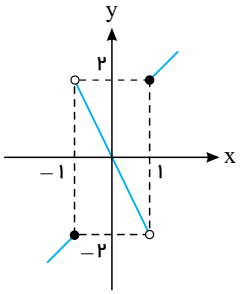
۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۱۳}$ ۳) $-\frac{۱۹}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۶}$

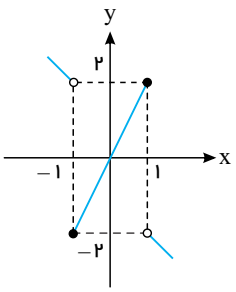
۱۷) اگر $f(x)=(x^۲-ax+a-۱)([x]+[-x])$ و $f'(۱)=۲a$، مقدار a کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

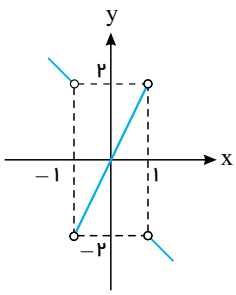
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۸) نمودار مشتق تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ **۲** ۳ ۴

شرط مشتق پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ باهم برابر باشند.

شرط پیوستگی:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2\sqrt{4x-3} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^3+bx) = a+b \Rightarrow a+b=2 \quad (I) \\ f(1)=2 \end{cases}$$

تساوی مشتق‌های راست وچپ: $f'_+(1) = f'_-(1) \to 2\times \dfrac{4}{2\sqrt{4x-3}} = 3ax^2+b \to 4 = 3a+b \quad (II)$

از I و II جواب $a=1$ و $b=1$ بدست می‌آید.

۲ ۱ **۲** ۳ ۴ دو تابع را تلاقی می‌دهیم و معادلهٔ تلاقی نباید ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

$$\begin{cases} f(x) = mx^2+1 \\ g(x) = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} mx^2+1 = mx \longrightarrow mx^2-mx+1=0 : \text{معادلهٔ تلاقی}$$

$$\Delta < 0 \longrightarrow b^2-4ac<0 \longrightarrow m^2-4m<0 \longrightarrow m(m-4)<0$$

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
عبارت <0		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\longrightarrow 0<m<4$

توجه کنید اگر $m=0$ باشد دو تابع به‌صورت $f(x)=1$ و $g(x)=0$ در می‌آیند که هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند بنابراین $0\le m<4$ است.

۳ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u) \to y' = u'f'(u)}$

چون جواب حد، عدد شده است و مخرج، صفر شده است پس صورت هم باید صفر باشد. حال به کمک روش هوپیتال، رفع ابهام می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{1} = f'(2) = \frac{1}{2} \to f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$y = xf(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = 1(f\sqrt{x}) + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\right) \xrightarrow{x=4} y'(4) = f(2) + \frac{4}{2\sqrt{4}}f'(2) = -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

همچنین داریم $y(4) = 4f(\sqrt{4}) = 4f(2) = -8$، لذا خواهیم داشت:

$$y-(-8) = -\frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow 2y+16 = -3x+12 \Rightarrow 2y+3x+4=0$$

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌توانیم شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست را در نقطهٔ $x=2$ با شیب خطوط قاطع، تخمین بزنیم. یعنی داریم:

$$A(1.9999, 45) \quad , \quad B(2,5) \quad , \quad C(2.0001, 5.0001)$$

$$m_{AB} = \frac{45-5}{1.9999-2} = \frac{40}{-0.0001} = -400000$$

$$m_{BC} = \frac{5.0001-5}{2.0001-2} = \frac{0.0001}{0.0001} = 1$$

بنابراین شیب نیم‌مماس چپ به $-\infty$ نزدیک می‌شود و شیب نیم‌مماس راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود، درنتیجه باید نیم‌مماس چپ موازی محور yها باشد و نیم‌مماس راست دارای زاویهٔ 45° با محور xها باشد. از این رو گزینهٔ ۳ جواب است.

۵ ۱ ۲ **۳** ۴ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$f(x) = \frac{\overbrace{(2-x)(2+x)}^{\text{اتحاد مزدوج}}(2^2+x^2)(2^4+x^4)\cdots(2^{2^n}+x^{2^n})}{2-x} = \frac{\overbrace{(2^2-x^2)(2^2+x^2)}^{\text{اتحاد مزدوج}}(2^4+x^4)\cdots(2^{2^n}+x^{2^n})}{2-x} = \frac{\overbrace{(2^4-x^4)(2^4+x^4)}^{\text{اتحاد مزدوج}}\cdots(2^{2^n}+x^{2^n})}{2-x}$$

$$= \frac{(2^8-x^8)\cdots(2^{2^n}+x^{2^n})}{2-x}$$

با ادامه روند فوق داریم:

$$f(x) = \frac{(2^{2^n})^2-(x^{2^n})^2}{2-x} = \frac{2^{2^{n+1}}-x^{2^{n+1}}}{2-x}$$

$$f'(x)=\frac{-2^{2^{n+1}}\times x^{2^{n+1}-1}(2-x)-(-1)(2^{2^{n+1}}-x^{2^{n+1}})}{(2-x)^2}$$

$$f'(0)=\frac{0+2^{2^{n+1}}}{2^2}=2^{2^{n+1}-2}$$

۶) ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم $y=f(u)\to y'=u'f'(u)$ و $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\le -1 \text{ یا } x\ge 1\\ 2x^2-1 & -1<x<1\end{cases}$ است.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0^+}\frac{-f'(1-h)}{2}=-\frac{1}{2}f'(1^-)$$

برای محاسبهٔ $f'(1^-)$ از ضابطهٔ پایین استفاده می‌کنیم.

$$f'(1^-)=4x=4\to -\frac{1}{2}f'(1^-)=-2$$

۷) ۱ ۲ **۳** ۴ نقطهٔ $A(x,\sqrt{x})$ روی منحنی $y=\sqrt{x}$ قرار دارد. فاصلهٔ این نقطه تا نقطهٔ $B(2,0)$ برابر است با:

$$d=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+x}\Rightarrow d(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$$

ملاحظه می‌شود که این فاصله تابعی از x، طول نقطهٔ A، است. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع d وقتی $x=3$ است، برابر $d'(3)$ است؛ پس:

$$d'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}\Rightarrow d'(3)=\frac{3}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{4}=0/75$$

۸) ۱ ۲ **۳** ۴ $x-1$ به‌ازای $x=1$، صفر می‌شود پس فقط کافی است از $x-1$ مشتق گرفته و در بقیهٔ عبارت، $x=1$ را جایگزین کنیم.

$$f(x)=(x-1)\sqrt{2x^3+6x^2}\to f'(1)=1\times\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۹) ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به رابطه داده‌شده و مشتق‌پذیر f در $x=2$، مشخص است که $f(2)=9$ و $f'(2)=\frac{3}{2}$.

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow g'(2)=\sqrt{f(2)}+\frac{2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=3+\frac{\frac{3}{2}}{3}=3+\frac{1}{2}=3/5$$

۱۰) ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

از آن‌جا که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق مرتبه‌ی دوم دارد بنابراین دو بار از تابع f مشتق می گیریم. بنابراین داریم:

$$h(x)=f(1-4x^2)\Rightarrow h'(x)=(-8x)f'(1-4x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق حاصلضرب}} h''(x)=(-8x)(f''(1-4x^2)\times(-8x))+((-8)f'(1-4x^2))$$

$$\Rightarrow h''(0)=0\times(f''(1)\times 0)+(-8)f'(1)\xrightarrow{f'(1)=1} h''(0)=-8f'(1)=-8\times 1=-8$$

۱۱) ۱ **۲** ۳ ۴

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1}=\frac{\sqrt{1/44}-\sqrt{1}}{0/44}=\frac{1/2-1}{0/44}=\frac{0/2}{0/44}=\frac{20}{44}=\frac{5}{11}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{11}-\frac{1}{2}=\frac{10-11}{22}=-\frac{1}{22}$$

بنابراین $\frac{1}{22}$ کم‌تر است.

۱۲) ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(t)=40-\frac{40m}{3}t^3\Rightarrow f'(t)=-40mt^2$$

$$f'(2)=-40\Rightarrow -40m\times 4=-40\Rightarrow 4m=1\Rightarrow m=\frac{1}{4}$$

۱۳) ۱ ۲ **۳** ۴ فرض کنید شیب خط مماس m باشد، از آنجا که محور طول‌ها شیب صفر دارد، لذا زاویه بین خط مماس و محور طول‌ها برابر است با:

$$\text{زاویهٔ خط مماس و محور طول‌ها}=\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right|=\left|\frac{m-0}{1+m(0)}\right|=5\Rightarrow |m|=5$$

درنتیجه خط مماس در نقطه A به طول a، شیب ۵ دارد، لذا خواهیم داشت:

$$y = x^۲ + ۵x + ۷ \Rightarrow y' = ۲x + ۵ \xrightarrow{x=a} y'(a) = ۲a + ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲a + ۵ = ۵ \Rightarrow a = ۰ \\ ۲a + ۵ = -۵ \Rightarrow a = -۵ \end{cases}$$

۱۴ ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا نقطهٔ $x = ۱$ را در منحنی قرار می‌دهیم تا عرض نقطه به‌دست آید. لذا داریم:

$$y = |x^۲ - ۲| \xrightarrow{x=۱} y = |۱ - ۲| = ۱ \Rightarrow A(۱, ۱)$$

حال مشتق تابع را در نقطهٔ $(۱, ۱)$ به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که در اطراف نقطهٔ $x = ۱$، $x^۲ - ۲ < ۰$، درنتیجه خواهیم داشت:

$$y = |x^۲ - ۲| \xrightarrow{x=۱ \text{ در اطراف}} y = -(x^۲ - ۲) = -x^۲ + ۲ \Rightarrow y' = -۲x \xrightarrow{x=۱} y' = -۲(۱) = -۲$$

معادلهٔ خط مماس: $A(۱, ۱)$ ، $y'(۱) = -۲ \Rightarrow y - ۱ = -۲(x - ۱) \Rightarrow y + ۲x = ۳$

۱۵ ۴ ۳ **۲** ۱ چون $\sin ۲x = \dfrac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}$ در نتیجه:

$$y = (۱ + \tan^۲ x)\frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x} = ۲\tan x$$

در نتیجه $y' = ۲(۱ + \tan^۲ x)$ چون $۱ + \tan^۲ x = \dfrac{۱}{\cos^۲ x}$ پس:

$$y' = \frac{۲}{\cos^۲ x}$$

۱۶ **۴** ۳ ۲ ۱ خط $y = -۲x + ۶$ بر نمودار تابع f در $x = ۱$ مماس است، پس $\begin{cases} f(۱) = ۴ \\ f'(۱) = -۲ \end{cases}$. حال داریم:

$$g(۳x - ۱) = f^۲(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow ۳g'(۳x - ۱) = ۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}))f(\sqrt{x}) + \frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۳g'(۲) = f'(۱)f(۱) + \frac{f'(۱)}{۲\sqrt{f(۱)}} \Rightarrow ۳g'(۲) = -۸ + \frac{-۲}{۴} \Rightarrow g'(۲) = -\frac{۱۷}{۶}$$

۱۷ **۴** ۳ ۲ ۱ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲ - ax + a - ۱)([x] + [-x]) - ۰}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x - ۱)(x - a + ۱)([x] + [-x])}{x - ۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱}(x - a + ۱)([x] + [-x]) = (۲ - a)(-۱) = a - ۲$$

بنابراین:

$$f'(۱) = a - ۲ = ۲a \Rightarrow a = -۲$$

۱۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$f(x) = |x^۲ - ۱| = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \le -۱ \text{ یا } x \ge ۱ \\ -x^۲ + ۱ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \\ -۲x & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌های f و f' مشخص می‌شود که تابع f در نقاط $x = ۱$ و $x = -۱$ مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین نقاط $x = -۱$ و $x = ۱$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار ندارند. از طرف دیگر در بازهٔ $(-۱, ۱)$ پاره‌خط $y = -۲x$ و در بازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۱, +\infty)$ نیم‌خط‌های $y = ۲x$ رسم شده است؛ بنابراین گزینهٔ ۱ جواب است.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	**۱**	۲	۳	۴
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	۲	**۳**	۴

۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	**۲**	۳	۴

۱۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	۱	**۲**	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۸	**۱**	۲	۳	۴