نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۷۵ دقیقه

نام آزمون: مشتق (تشریحی)

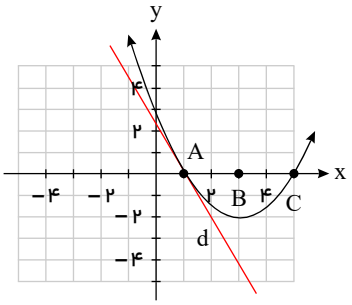
تاریخ آزمون:

سید بهروز پرتوی

۱) در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = ۱$ بر نمودار f مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = ۱$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



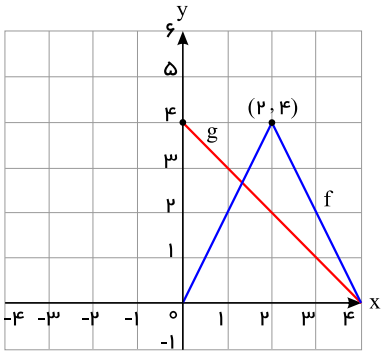
۲) اگر $f(x) = ۱ - ۲x^۲$ باشد. $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۳) اگر $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۱$، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۴) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) اگر $h(x) = ۳x^۴ + ۲x^۲ - ۱$ باشد، آنگاه $h''(۱)$ برابر ..... است.

۵) نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

۶) در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی‌شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

الف) علی $j - s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $j \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

۷) در تابع $f(x) = \dfrac{x^۲}{x + ۱}$ حاصل $f''(۱)$ را بیابید.

۸) مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید.

الف

$$f(x) = x\sqrt{x^{۲} - ۴x + ۴} \quad , \quad x_{۰} = ۲$$

ب

$$f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^{۲}}} \quad , \quad x_{۰} = ۰$$

پ

$$f(x) = \sqrt{|x + ۳|} \quad , \quad x_{۰} = -۳$$

۹ مشتق بگیرید. (ساده کردن لازم نمی‌باشد.)

الف

$$f(x) = (x^{۳} - ۸x + ۷)^{۱۹}$$

ب

$$f(x) = \left(\frac{۳x^{۲} + ۵}{۱ - x}\right)^{۷}$$

پ

$$f(x) = (x^{۲} - ۸x)^{۱۱}(x^{۳} - ۵x)^{۴}$$

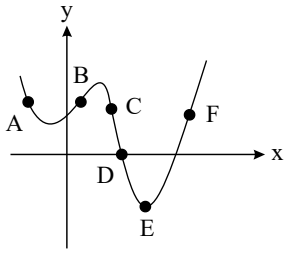
ت

$$f(x) = \sqrt[۳]{\frac{۱ - ۲x}{x + ۵}}$$

ث

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^{۲} - ۸x}}{۱ - ۶x}$$

۱۰ با توجه به نمودار داده‌شده، گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید.



الف در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟

الف) B ب) E

ب شیب خط مماس در نقطهٔ F چه علامتی دارد؟

الف) مثبت ب) منفی

پ شیب خط مماس بر نمودار، در نقطهٔ D نسبت به نقطهٔ B چگونه است؟

الف) بیشتر ب) کمتر

۱۱ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x = ۲$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

۱۲ نقاطی روی منحنی تابع $f(x) = -x^{۳} + ۲x + ۵$ بیابید که مماس در آن نقاط، عمود بر نیمساز ربع اول و سوم باشد.

۱۳ مختصات نقاطی روی منحنی $y = \frac{x^{۲} + ۱}{x}$ که مماس در آن نقاط، موازی محور xها است را به‌دست آورید.

۱۴) تابع $f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

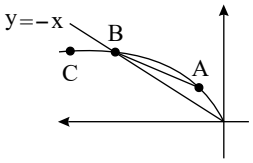
۱۵) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{|x+۲|}$ در نقطهٔ $x=-۲$ را بررسی کنید.

۱۶) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

۱۷) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=x^۳+۲$ را در نقطهٔ a بیابید.

۱۸) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت لحظه‌ای در $t=۲$ برای متحرکی با معادلهٔ حرکت $f(t)=t^۲+۳t$ برابر ۷ است.



۱۹) برای نمودار $y=f(x)$ اعداد داده‌شده را از کوچک‌تر به بزرگ‌تر مرتب کنید.

(راهنمایی: شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را به ترتیب $m_۱$, $m_۲$, $\cdots$, $m_۶$ در نظر بگیرید.)

الف. شیب نمودار در نقطهٔ A

ب. شیب نمودار در نقطهٔ B

پ. شیب نمودار در نقطهٔ C

ت. شیب خط AB

ث. شیب خط $y=۱$

ج. شیب خط $y=-x$

۲۰) معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ را در نقطهٔ $A(۲,f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

پاسخنامه تشریحی

۱

الف) $A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. \to f'(۱)=\dfrac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\dfrac{۰-۲}{۱-۰}=-۲$

ب) $m_C>m_B$

۲

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱-۲x^۲-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱-۲x^۲+۱}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{-۲x^۲+۲}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{-۲(x^۲-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{-۲(x+۱)(x-۱)}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}-۲(x-۱)=-۲(-۲)=۴$$

۳

$$۱)\ x=۲\to y=۱۲-۴+۱=۹\to\left|\begin{matrix}۲\\۹\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ m_{\text{مماس}}=f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-f(۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x-۸}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow[\text{یعنی } x-۲]{\text{تقسیم بر عامل ابهام}}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=۶+۴=۱۰$$

$$۳)\ y-y_۱=m(x-x_۱)\to y-۹=۱۰(x-۲)\to y=۱۰x-۱۱$$

۴

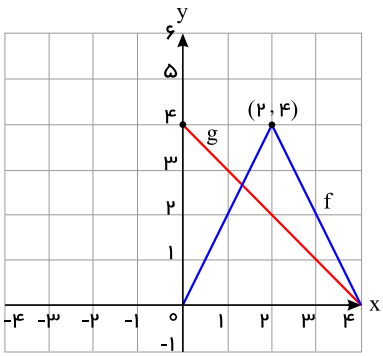
۴۰

الف

علت : $h'(x)=۱۲x^۳+۴x\to h''(x)=۳۶x^۲+۴\to h''(۱)=۳۶+۴=۴۰$

۵

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.



$$(۰,۰),(۲,۴)\Rightarrow m=\frac{۴-۰}{۲-۰}=۲\Rightarrow y-۰=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x$$

$$(۲,۴),(۴,۰)\Rightarrow m=\frac{۴-۰}{۲-۴}=-۲\Rightarrow y-۰=-۲(x-۴)\Rightarrow y=-۲x+۸$$

$$f(x)=\begin{cases}۲x & ۰\le x\le ۲\\ -۲x+۸ & ۲<x\le ۴\end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.

$$(۰,۴),(۴,۰)\Rightarrow m=\frac{۴-۰}{۰-۴}=-۱\Rightarrow y-۰=-۱(x-۴)\Rightarrow y=-x+۴\Rightarrow g(x)=-x+۴$$

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

$$f(۱)=۲\ ,\ ۰<x<۲ \Rightarrow f(x)=۲x \Rightarrow f'(x)=۲ \Rightarrow f'(۱)=۲$$

$$g(۱)=۳\ ,\ g(x)=-x+۴ \Rightarrow g'(x)=-۱ \Rightarrow g'(۱)=-۱$$

$$h'(۱)=f'(۱)\cdot g(۱)+g'(۱)\cdot f(۱)=۲\times ۳+(-۱)\times ۲=۶-۲=۴$$

تابع f در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲x+۸-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}=-۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$$f(۳)=۲\ ,\ f'(۳)=-۲\ ,\ g(۳)=۱\ ,\ g'(۳)=-۱$$

$$h'(۳)=f'(۳)\cdot g(۳)+g'(۳)\cdot f(۳)=-۲\times ۱+(-۱)\times ۲=-۴$$

ب)

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

$$k'(۱)=\frac{۲\times ۳-(-۱)\times ۲}{۳^۲}=\frac{۶+۲}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳)=\frac{f'(۳)g(۳)-g'(۳)f(۳)}{g^۲(۳)}=\frac{(-۲)\times ۱-(-۱)\times ۲}{۱^۲}=\frac{-۲+۲}{۱}=۰$$

۶ سرعت حرکت علی با دوچرخه j متر در ثانیه و سرعت حرکت رضا با پای پیاده s متر در ثانیه است. حال مسافت طی‌شده توسط علی و رضا را در بازهٔ زمانی $[t_۱,t_۲]$ یافته و با هم مقایسه می‌کنیم.

مسافت طی‌شده توسط علی $x_A=V_A\cdot\Delta t=j\cdot\Delta t$

مسافت طی‌شده توسط رضا $x_R=V_R\cdot\Delta t=s\cdot\Delta t$

حال با محاسبهٔ اختلاف مسافت یا نسبت مسافت طی‌شده توسط این دو نفر داریم:

$$x_A-x_R=j\cdot\Delta t-s\cdot\Delta t=(j-s)\Delta t$$
$$\frac{x_A}{x_R}=\frac{j\cdot\Delta t}{s\cdot\Delta t}=\frac{j}{s}\Rightarrow x_A=\frac{j}{s}\cdot x_R$$

بنابراین مورد «ث» صحیح است.

۷

$$f(x)=\frac{x^۲}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-x^۲}{(x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۲x}{(x+۱)^۲}$$
$$f''(x)=\frac{(۲x+۲)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(x^۲+۲x)}{(x+۱)^۴}=\frac{(x+۱)((۲x+۲)(x+۱)-۲(x^۲+۲x))}{(x+۱)^۴}$$
$$f''(x)=\frac{(۲x+۲)(x+۱)-۲(x^۲+۲x)}{(x+۱)^۳}\Rightarrow f''(۱)=\frac{۴\times ۲-۲\times ۳}{۲^۳}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

۸

الف

$$f(x)=x\sqrt{x^۲-۴x+۴}=x\sqrt{(x-۲)^۲}=x|x-۲|$$

تابع $f(x)$ در $x_۰=۲$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$$f'(x_۰)=\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{x|x-۲|-\overbrace{f(۲)}^{۰}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x\overbrace{|x-۲|}^{۰}}{x-۲}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(۲^+) = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x\overbrace{|x-۲|}^{+}}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x(x-۲)}{(x-۲)} = \lim\limits_{x\to ۲^+} x = ۲ \\ f'(۲^-) = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x\overbrace{|x-۲|}^{-}}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-x(x-۲)}{(x-۲)} = \lim\limits_{x\to ۲^-} (-x) = -۲ \end{cases}$$

پس تابع در $x_۰ = ۲$ مشتق‌ناپذیر است.

ب

تابع $f(x)$ در $x_۰ = ۰$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$$f'(x_۰) = \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}} - \overbrace{f(۰)}^{۰}}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱-۱+x^۲}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim_{x\to ۰} \frac{|\overbrace{x}^{۰}|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(۰^+) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{|\overbrace{x}^{+}|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \\ f'(۰^-) = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{|\overbrace{x}^{-}|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{-x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \dfrac{-۱}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

پس تابع در $x_۰ = ۰$ مشتق‌ناپذیر است.

پ

تابع $f(x)$ در $x_۰ = -۳$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$$f'(x_۰) = \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to -۳} \frac{\sqrt{|x+۳|} - \overbrace{f(-۳)}^{۰}}{x+۳}$$

$$= \lim_{x\to -۳} \frac{\sqrt{|x+۳|}}{x+۳} \times \frac{\sqrt{|x+۳|}}{\sqrt{|x+۳|}} = \lim_{x\to -۳} \frac{|x+۳|}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(-۳^+) = \lim\limits_{x\to (-۳)^+} \dfrac{\overbrace{|x+۳|}^{+}}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^+} \dfrac{(x+۳)}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^+} \dfrac{۱}{\sqrt{|x+۳|}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۰^+}} = +\infty \\ f'(-۳^-) = \lim\limits_{x\to (-۳)^-} \dfrac{\overbrace{|x+۳|}^{-}}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^-} \dfrac{-(x+۳)}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^-} \dfrac{-۱}{\sqrt{|x+۳|}} = \dfrac{-۱}{\sqrt{۰^+}} = -\infty \end{cases}$$

پس تابع در $x_۰ = -۳$ مشتق‌ناپذیر است.

۹

الف

$$f(x) = (x^۳ - ۸x + ۷)^{۱۹} \rightarrow f'(x) = ۱۹(x^۳ - ۸x + ۷)^{۱۸}(۳x^۲ - ۸)$$

ب

$$f(x) = \left(\frac{۳x^۲+۵}{۱-x}\right)^۷ \rightarrow f'(x) = ۷\left(\frac{۳x^۲+۵}{۱-x}\right)^۶ \left(\frac{۶x(۱-x) - (-۱)(۳x^۲+۵)}{(۱-x)^۲}\right)$$

پ

$$f(x) = (x^۲ - ۸x)^{۱۱}(x^۳ - ۵x)^۴$$

$$\rightarrow f'(x) = ۱۱(x^۲ - ۸x)^{۱۰}(۲x - ۸)(x^۳ - ۵x)^۴ + ۴(x^۳ - ۵x)^۳(۳x^۲ - ۵)(x^۲ - ۸x)^{۱۱}$$

ت

$$f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱-۲x}{x+۵}} \to f'(x)=\frac{۱\left(\frac{-۲(x+۵)-۱(۱-۲x)}{(x+۵)^۲}\right)}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۱-۲x}{x+۵}\right)^۲}}$$

ث

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۸x}}{۱-۶x} \to f'(x)=\frac{\frac{۱(۲x-۸)}{۲\sqrt{x^۲-۸x}}(۱-۶x)-(-۶)\sqrt{x^۲-۸x}}{(۱-۶x)^۲}$$

۱۰

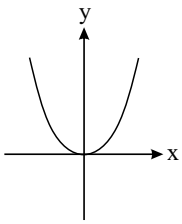
الف ب (E)

ب الف (مثبت)

پ ب (کمتر)

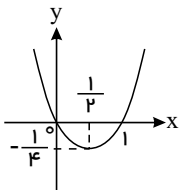
۱۱

الف) $f(x)=x^۲$



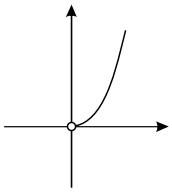
$\to f'(x)=۲x \to f'(۰)=۰$

ب) $f(x)=x^۲-x$



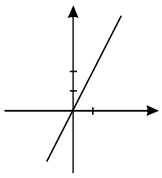
$\to f'(x)=۲x-۱ \to f'(۲)=۳$

پ) $f(x)=x^۳\ ,\ x>۰$



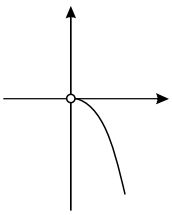
$\to f'(x)=۳x^۲ \xrightarrow{x>۰} ۳x^۲>۰$

ت) $f(x)=۲x$



$\to f'(x)=۲$

ث) $f(x)=-x^۳\ ,\ x>۰$



$\to f'(x)=-۳x^۲ \xrightarrow{x>۰} -۳x^۲<۰$

۱۲

$y=x \to m_{\text{خط}}=۱ \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}}=-۱$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و مساوی ۱ − قرار دهیم.

$$y' = -۳x^۲ + ۲ = -۱ \to x^۲ = ۱ \to \begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۶ \to A \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۶ \end{matrix} \right. \\ x = -۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۲ \to B \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۲ \end{matrix} \right. \end{cases}$$

۱۳ هر خطی موازی محور x است، شیبش صفر است بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر با صفر قرار دهیم.

$$y = \frac{x^۲ + ۱}{x} \to y' = \frac{۲x(x) - ۱(x^۲ + ۱)}{x^۲} = \frac{۲x^۲ - x^۲ - ۱}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲} = ۰$$

$$x^۲ - ۱ = ۰ \to \begin{cases} x = ۱ \to y = ۲ \to A \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix} \right. \\ x = -۱ \to y = -۲ \to A' \left| \begin{matrix} -۱ \\ -۲ \end{matrix} \right. \end{cases}$$

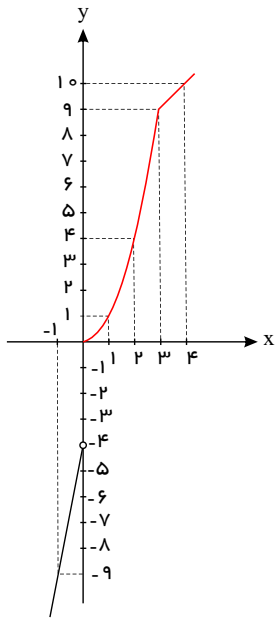
۱۴ الف)

$$f(x) = \begin{cases} ۵x - ۴ & x < ۰ \\ x^۲ & ۰ \le x \le ۳ \\ x + ۶ & x > ۳ \end{cases}$$

x	۰	−۱
y	−۴	−۹

x	۰	۳
y	۰	۹

x	۳	۴
y	۹	۱۰



ب)

$$f(۰) = ۰ \ , \ f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{۵x - ۴ - ۰}{x} = \frac{-۴}{۰^-} = +\infty$$

$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x^۲ - ۰}{x} = \lim_{x \to ۰^+} x = ۰$$

تابع در $x = ۰$ مشتق‌ناپذیر است.

$$f(۳) = ۹ \ , \ f'_-(۳) = \lim_{x \to ۳^-} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳^-} \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳^-} \frac{(x - ۳)(x + ۳)}{x - ۳}$$

$$= \lim_{x \to ۳^-} (x + ۳) = ۶$$

$$f'_+(۳) = \lim_{x \to ۳^+} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{x + ۶ - ۹}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{x - ۳}{x - ۳} = ۱$$

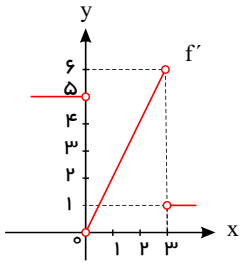
تابع در $x = ۳$ مشتق‌ناپذیر است.

پ)

$$f'(x) = \begin{cases} ۵ & x < ۰ \\ ۲x & ۰ < x < ۳ \\ ۱ & x > ۳ \end{cases}$$

تابع مشتق در نقاط $x = ۰$ و $x = ۳$ تعریف نشده است زیرا تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

ت) نمودار تابع مشتق یعنی f' به‌صورت مقابل است.



۱۵

$$f(x)=\sqrt{|x+۲|},\ f(-۲)=۰$$

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{\sqrt{|x+۲|}-۰}{x+۲}\times\frac{\sqrt{|x+۲|}}{\sqrt{|x+۲|}}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{|x+۲|}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{-(x+۲)}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{-۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{x+۲}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۶

$$f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}},\ f(۰)=۰$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-۱+x^۲}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۷

$$f(x)=x^۳+۲,\ f(a)=a^۳+۲$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^۳+۲-a^۳-۲}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^۲+ax+a^۲)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^۲+ax+a^۲)=a^۲+a^۲+a^۲=۳a^۲\Rightarrow f'(a)=۳a^۲$$

۱۸

درست

الف

سرعت لحظه‌ای: $f'(t)=۲t+۳\overset{t=۲}{=\!=}۷$

۱۹

شیب نمودار در $m_۱=A$

شیب نمودار در $m_۲=B$

شیب نمودار در $m_۳=C$

شیب خط $m_۴=AB$

شیب خط $m_۵:y=۱$

شیب خط $y=-x$ را $m_۶$ در نظر می‌گیریم بنابراین داریم:

$$m_۱<m_۶<m_۴<m_۲<m_۳<m_۵$$

۲۰

$$f'(x)=-۲x+۱۰\ ,\ f'(۲)=۶\ ,\ f(۲)=۱۶$$

در نتیجه $A(۲, ۱۶)$ است و شیب برابر ۱۶ است؛ پس معادلهٔ خط برابر است با:

$$y - y_A = f'(۲)(x - x_A) \Rightarrow y - ۱۶ = ۶(x - ۲) \Rightarrow y = ۶x + ۴$$