



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه



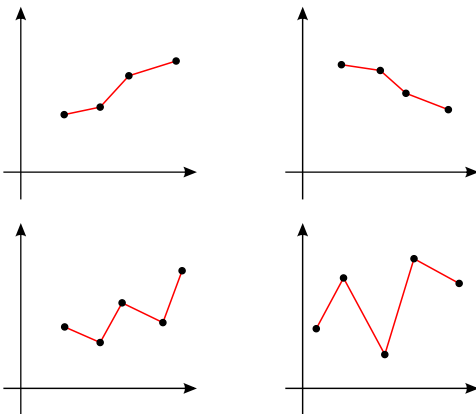
نام آزمون: ریاضی یازدهم انسانی آزمون جامع

تشریحی
تاریخ آزمون:

۱ تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده را می‌نامند.

۲ اگر مقدار داده‌ای با درون‌یابی ۴۲۰۰ به دست آمده و مقدار خطای درون‌یابی برابر ۵۰۰ باشد. مقدار واقعی این داده چه مقدار یا مقداری می‌تواند باشد؟

۳ اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت درون‌یابی و برون‌یابی خطی بهتری امکان پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



۴ خط فقر را تعریف کنید و نحوه محاسبه آن را توضیح دهید.

۵ جدول زیر، هزینه سرانه گوشت مصرفی را نشان می‌دهد. شاخص بهای گوشت مصرفی را نسبت به سال پایه ۹۰ محاسبه کنید.

سبد هزینه	گوشت قرمز	ماهی	گوشت مرغ
قیمت در سال ۹۰	۳۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۵۰۰۰
قیمت در سال ۹۷	۴۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۸۰۰۰
مقدار مصرف	۲۰	۱۰	۳۰

۶ در هر قسمت با توجه به تابع f و g توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$

الف) $f - g$ ب) $\frac{f}{g}$

۷ با توجه به دو تابع f و g ضابطه تابع $(f - g)(x)$ را مشخص کنید.

$f(x) = \text{sign}(x)$

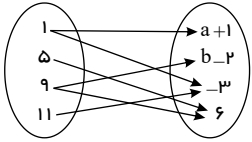
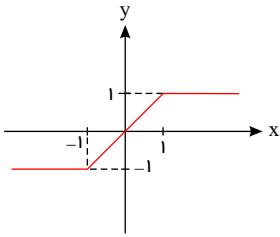
$g(x) = x^2 + 1$

۸ اگر $(f - g)(x) = 5x - 3$ و $f(x) = 3x - 2$ باشند، ضابطه تابع $g(x)$ را مشخص کنید.

۹ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - 1|$ را رسم کنید.



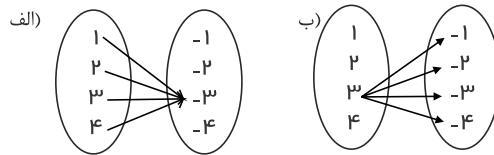
۱۰ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



۱۱ مقدار a, b را طوری تعیین کنید که نمودار پیکانی زیر یک تابع باشد.

۱۲ اگر دو زوج مرتب $(7, 3m - 1)$ و $(7, 4m + 2)$ دو زوج مرتب از یک تابع باشند، مقدار m را مشخص کنید.

۱۳ کدام یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



۱۴ در هر حالت ارزش گزاره‌های p و q را تعیین کنید (درست $\equiv T$ و نادرست $\equiv F$)

(الف) $\sim (\sim p \vee \sim q) \equiv T$ (ب) $(\sim p \vee q) \equiv F$

۱۵ اگر ۳ مقسوم‌علیه عدد ۱۹ است: p ، ۳۶ مضرب عدد ۱۲ است: q و گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره مرکب $(\sim p \vee r) \wedge q$ را تعیین کنید.

۱۶ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) عدد ۲۷۱ اول است. (ب) $7,1 \times 2,8 = 19,17$ (پ) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$ (ت) $2 \neq 5$
 (ث) عدد ۱۲ زوج است. (ج) عدد ۱۳ گویا است.

۱۷ ثابت کنید اگر n عددی صحیح و n^2 زوج باشد؛ آن گاه n زوج است.

۱۸ ایراد استدلال زیر را یافته، راه‌حل درست آن را بنویسید.

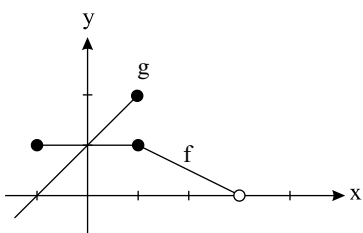
«اگر میانگین نمرات یک کلاس ده نفره ۱۵ و میانگین نمرات یک کلاس پانزده نفره ۱۸ باشد، در این صورت میانگین نمرات این دو کلاس جمعاً $\bar{x} = \frac{15 + 18}{2} = 16,5$ است.»

۱۹ فرض کنیم گزاره « A نتیجه می‌دهد B » درست باشد. به کمک مثال «اگر من حافظ باشم، آن‌گاه من شیرازی هستم» و با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) نقیض A نتیجه می‌دهد نقیض B .

(ب) نقیض B نتیجه می‌دهد نقیض A .

۲۰ با توجه به نمودار داده شده، عبارت زیر را حساب کنید.



$$\frac{(3f + 2g)(1)}{(g \times f)(0)}$$



پاسخنامه تشریحی

۱ برون‌یابی

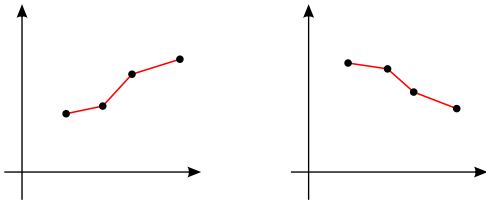
۲

خطای درون‌یابی برابر قدرمطلق تفاضل مقدار واقعی از مقدار به‌دست‌آمده از درون‌یابی است. در نتیجه، اگر مقدار واقعی را با x نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$|x - 4200| = 500$$

با توجه به رابطه بالا مقدار واقعی می‌تواند برابر ۳۷۰۰ یا ۴۷۰۰ باشد.

۳ در نمودارهای زیر، درون‌یابی و برون‌یابی بهتری امکان‌پذیر است، چون به‌طور یکنواخت کاهش یا افزایش یافته‌اند و تغییرات ناگهانی ندارند.



۴ خط فقر، حداقل درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانه درآمد ماهیانه افراد جامعه.

۵ برای محاسبه شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شاخص بهای کالا} = \frac{\text{مجموع مبلغ سه کالا در سال موردنظر}}{\text{مجموع مبلغ سه کالا در سال پایه}} \times 100$$

$$\text{شاخص بهای گوشت مصرفی} = \frac{8000 \times 30 + 30000 \times 10 + 45000 \times 20}{5000 \times 30 + 20000 \times 10 + 30000 \times 20} \times 100$$

$$= \frac{240000 + 300000 + 900000}{150000 + 200000 + 600000} \times 100 = \frac{1440000}{950000} \times 100 \approx 1,51 \times 100 = 151\%$$

۶ دامنه دو تابع f و g برابر \mathbb{R} است، در نتیجه اشتراک دامنه این دو تابع برابر \mathbb{R} است.

الف) برای مشخص کردن ضابطه تابع $f - g$ تابع $f(x) = |x|$ را به صورت دو ضابطه‌ای $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ نشان می‌دهیم.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - |x| = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

ب) از اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g مقادیری که $g(x) = 0$ می‌شوند را کنار می‌گذاریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$g(x) = |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{x}{-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

۷ ابتدا تابع $f(x) = \text{sign}(x)$ را به صورت چند ضابطه‌ای مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

سپس ضابطه تابع $f - g$ را مشخص می‌کنیم.

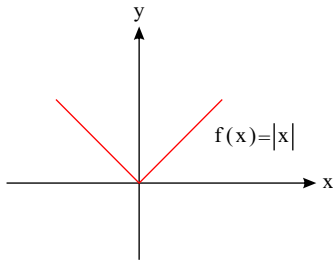
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \text{sign}(x) - (x^2 + 1)$$

$$= \begin{cases} 1 - (x^2 + 1), & x > 0 \\ 0 - (x^2 + 1), & x = 0 \\ -1 - (x^2 + 1), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x^2 - 1, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x = 0 \\ -1 - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x = 0 \\ -x^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$$

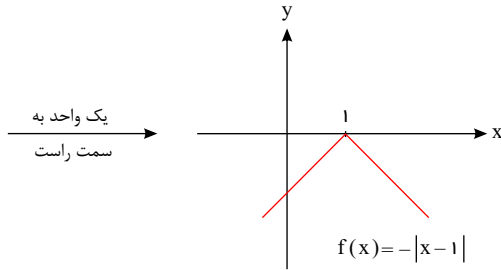
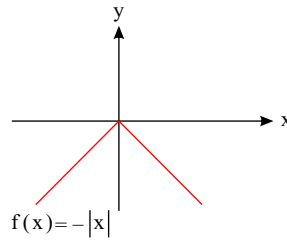
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow 5x - 3 = 3x - 2 - g(x)$$

$$\Rightarrow -g(x) = 5x - 3 - 3x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow -g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 1$$

۹ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - 1|$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم، سپس یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.



قرینه نسبت به محور X ها



یک واحد به سمت راست

۱۰ این تابع برای مقادیر $x \geq 1$ تابع ثابت $f(x) = 1$ ، برای $-1 < x < 1$ تابع همانی $f(x) = x$ و برای $x \leq -1$ تابع ثابت $f(x) = -1$ است. در نتیجه ضابطه این تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 1 \\ x & , -1 < x < 1 \\ -1 & , x \leq -1 \end{cases}$$

۱۱ از عضو ۱ در دامنه دو پیکان به $a + 1 = -3$ خارج شده است برای اینکه این نمودار پیکانی تابع باشد این مقادیر باید با هم برابر باشند.

$$a + 1 = -3 \Rightarrow a = -4$$

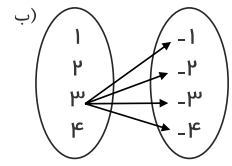
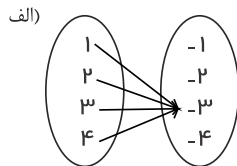
از عضو ۹ در دامنه دو پیکان به $b - 2 = 6$ وصل شده است در نتیجه داریم:

$$b - 2 = 6 \Rightarrow b = 8$$

۱۲ دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، برای اینکه این زوج مرتب‌ها مربوط به یک تابع باشند باید مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند. (با توجه به تعریف تابع در نتیجه داریم:

$$4m + 2 = 3m - 1 \Rightarrow 4m - 3m = -1 - 2 \\ \Rightarrow m = -3$$

۱۳



تابع نیست، زیرا از عضو ۳ در مجموعه اول چند پیکان خارج شده است. تابع ثابت است، زیرا به ازای تمام اعضای دامنه، یک عضو از مجموعه دوم (برد) مشخص شده است.

۱۴

$$\sim (\sim p \vee \sim q) \equiv T \rightarrow \sim p \vee \sim q \equiv F$$

(الف)

$$\rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv F \rightarrow p \wedge q \equiv T \rightarrow p \equiv q \equiv T$$

ترکیب عطفی فقط وقتی ارزش درست دارد، که هر دو گزاره درست باشد.

(ب) ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است، که هر دو گزاره ساده در آن نادرست باشند. پس:

$$q \equiv F \quad \text{و} \quad \sim p \equiv F \Rightarrow p \equiv T$$

۱۵ ارزش گزاره p نادرست است، چون ۳ شمارنده (مقسوم‌علیه) عدد ۱۹ نیست.

(عدد ۱۹ بر ۳ بخش پذیر نیست) پس $\sim p \equiv د$

در ترکیب فصلی یک گزاره درست باشد، ترکیب درست است.

ارزش گزاره q درست است.

ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دو گزاره ساده درست باشند.

$$(\sim p \vee r) \equiv (د \vee د) \equiv د$$

$$q \wedge (\sim p \vee r) \equiv (د \wedge د) \equiv د$$

(ب) $7,1 \times 2,8 \neq 19,17$

۱۶ (الف) (عدد ۲۷۱ اول نیست.) یا (چنین نیست که عدد ۲۷۱ اول است.)

(ت) $2 = 5$

(پ) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \geq \frac{3}{5}$ یا $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

(ج) (عدد ۱۳ گویا نیست.) یا (عدد ۱۳ گنگ است.)

(ث) (عدد ۱۲ فرد است.) یا (چنین نیست که عدد ۱۲ زوج باشد.)

می‌دانیم $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$$(n \in \mathbb{Z}) \begin{array}{l} p: n^2 \text{ زوج است} \\ q: n \text{ زوج است} \end{array} \rightarrow p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

اثبات درستی گزاره بالا از طریق $p \Rightarrow q$ دشوار است؛ با استفاده از قضیهٔ عکس نقیض گزارهٔ شرطی یعنی درستی $p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$ ثابت می‌کنیم.
اگر n فرد باشد، آن‌گاه n^2 فرد است:

$$(n \in \mathbb{Z}) \begin{array}{l} \sim p: n^2 \text{ فرد است} \\ \sim q: n \text{ فرد است} \end{array} \rightarrow \sim q \Rightarrow \sim p \rightarrow \text{اگر } n \text{ فرد باشد، آن‌گاه } n^2 \text{ فرد است.}$$

$$\begin{aligned} \text{فرد } n \text{ و } (n \in \mathbb{Z}) \rightarrow n = 2k + 1 \rightarrow n^2 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2(2k)(1) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_k) + 1 = 2k' + 1 \rightarrow \text{الگوی عدد فرد است} \end{aligned}$$

۱۸ با توجه به یکسان نبودن تعداد دانش‌آموزان دو کلاس، این روش صحیح نیست.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_1 = \frac{\text{مجموع نمرات کلاس ۱}}{10} = 15 \Rightarrow \text{مجموع نمرات کلاس ۱} = 15 \times 10 = 150 \\ \bar{x}_2 = \frac{\text{مجموع نمرات کلاس ۲}}{15} = 18 \Rightarrow \text{مجموع نمرات کلاس ۲} = 18 \times 15 = 270 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{150 + 270}{10 + 15} = 16,8$$

۱۹ گزارهٔ (الف) نادرست است زیرا با توجه به مثال خواهیم داشت: اگر من حافظ نباشم، آن‌گاه من شیرازی نیستم؛ که به‌طور حتم نادرست است. زیرا با این که من حافظ نیستم، ممکن است شیرازی باشم.

گزارهٔ (ب) بنا به قانون عکس نقیض درست است.

۲۰

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ g(1) = 2 \\ f(0) = g(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(3f + 2g)(1)}{(g \times f)(0)} = \frac{3f(1) + 2g(1)}{g(0) \times f(0)} = \frac{3(1) + 2(2)}{1 \times 1} = 7$$