



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه



نام آزمون: ریاضی ۱۲ انسانی فصل ۲ تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) اگر تابع  $f$  مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید.

$\mathbb{N}$    $\mathbb{R}$

(الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

$\mathbb{N}$    $\mathbb{R}$

(ب) میزان استفاده دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر یک ساعت

$\mathbb{N}$    $\mathbb{R}$

(ج) حجم مکعبی به ضلع  $x$

$\mathbb{N}$    $\mathbb{R}$

(د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

$\mathbb{N}$    $\mathbb{R}$

(ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

۲) اگر در یک دنباله حسابی داشته باشیم  $a_{10} + a_5 = 100$ ، مجموع ۱۴ جمله اول را بیابید.

۳) بین دو عدد ۵ و ۲۱، هفت عدد چنان درج کرده‌ایم که همه اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند. مجموع کل جملات دنباله را بیابید.

۴) اگر طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۰ بوده و اضلاع آن از بزرگ به کوچک یک دنباله حسابی تشکیل دهند، اضلاع دیگر را بیابید.

۵) بین ۷ و ۳۲ چهار جمله چنان درج کنید که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند، اختلاف مشترک بین اعداد را بیابید و جملات درج شده را مشخص کنید.

۶)  $m$  را چنان بیابید که واسطه حسابی بین ریشه‌های معادله  $2x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$  باشد.

۷) بین ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 21 = 0$  یک واسطه حسابی درج کرده‌ایم. این واسطه را به دست آورید.

۸) مقدار  $m$  را چنان تعیین کنید که عبارات  $3m - 1$  و  $m + 5$  و  $2m - 4$  جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند.

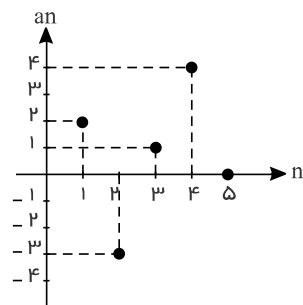
۹) در دنباله حسابی زیر، مجموع جملات داده شده را بیابید.

۵, ۱۲, ۱۹, ..., ۱۰۳

۱۰) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف)  $1 + 2 + 3 + \dots + n$

(ب)  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$



۱۱) با توجه به نمودار مقابل حاصل  $a_7 + a_3 + a_4 - a_5$  را به دست آورید.

۱۲) جمله  $1 + 2n$  یک دنباله برحسب  $n$  به صورت  $\frac{n+2}{2n-3}$  است، جمله ۱۱ام را بیابید.

۱۳) سه عدد را به گونه‌ای میان دو عدد ۱۰ و ۲۲ قرار دهید که یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل شود.

۱۴) چهار جمله اول دنباله  $c_n = \frac{1}{n}$  را بنویسید.

۱۵) با توجه به رابطه  $\begin{cases} a_{n+1} = 5 + a_n \\ a_1 = -2 \end{cases}$  مجموع دوازده جمله اول دنباله را به دست آورید.



۱۶) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) چهار جمله اول دنباله  $a_n = 3n + 2$  را بنویسید.

ب) رابطه بازگشتی دنباله ۵، ۱۱، ۱۷، ۰۰۰ را بنویسید.

۱۷) اعداد توان‌دار را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی را به صورت اعداد توان‌دار بنویسید.

الف

$$\left(\frac{4}{5}\right)^9$$

۱۸) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ب) اختلاف مشترک در دنباله اعداد ... و ۱۲ و ۸ و ۵ و ۲ برابر ۳ است.

۱۹) جمله اول یک دنباله حسابی ۵ و جمله دهم آن ۳۲ است:

الف) اختلاف مشترک را بیابید.

ب) مجموع ۲۰ جمله اول آن را به دست آورید.

۲۰) در یک دنباله حسابی جمله نهم برابر ۶۱ و جمله شانزدهم برابر ۹۶ است. اختلاف مشترک و جمله سی‌ام این دنباله را به دست آورید.



# پاسخنامه تشریحی

۱ الف) ارتفاع تا ۱۵ کیلومتر ( $\mathbb{R}$ )

ب) استفاده از اینترنت در هر یک ساعت ( $\mathbb{N}$ )

ج) ضلع  $x$  ( $\mathbb{R}$ )

د) بیست سال اخیر ( $\mathbb{N}$ )

ه) شماره ماه‌های سال ( $\mathbb{N}$ )

۲ در دنباله حسابی  $a_n$  داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_l = a_k + a_p$$

$$a_{10} + a_5 = 100 \xrightarrow{10+5=14+1} a_{10} + a_5 = a_{14} + a_1 = 100$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(a_1 + a_{14}) \xrightarrow{a_1 + a_{14} = 100} S_{14} = 7 \times (100) = 700$$

مجموع جملات دنباله حسابی برابر است با:

۳ تعداد کل جملات دنباله حاصل برابر ۹ تا است:

$$5, \dots, 21$$

هفت عدد

$$n = 7 + 2 = 9$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_9 = \frac{9}{2}(21 + 5) = \frac{9}{2} \times (26) = 9 \times (13) = 117$$

۴ وتر مثلث بزرگترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس دنباله اضلاع آن برابر است با:

$$10, 10 - d, 10 - 2d$$

$$(10)^2 = (10 - d)^2 + (10 - 2d)^2$$

$$100 = 100 - 20d + d^2 + 100 - 40d + 4d^2$$

$$\Rightarrow 5d^2 - 60d + 100 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر پنج}} d^2 - 12d + 20 = 0$$

$$d^2 - 12d + 20 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه اتحاد جمله مشترک}} (d - 10)(d - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 10 & \text{غنی} \\ d = 2 \end{cases}$$

$$d = 10 \Rightarrow 10, 10 - 10, 10 - 20 \Rightarrow 10, 0, -10$$

اگر  $d = 10$  باشد، اضلاع مثلث برابر با صفر و منفی می‌شود که در نتیجه ۱۰ غیر قابل قبول است.

$$d = 2 \Rightarrow 10, 8, 6 \text{ اضلاع مثلث}$$

۵ اختلاف مشترک دنباله حسابی که  $m$  واسطه حسابی بین جملات  $a$  و  $b$  آن درج کردیم برابر است با:

$$d = \frac{b - a}{m + 1} \Rightarrow d = \frac{32 - 7}{4 + 1} = \frac{25}{5} = 5$$

پس جملات دنباله حسابی حاصل برابر است با:

$$7, 7 + 5, 7 + 2 \times (5), 7 + 3 \times (5), 7 + 4 \times (5), 7 + 5 \times (5)$$

$$7, 12, 17, 22, 27, 32$$

۶ معادله را تقسیم بر ضریب  $2x^2$  می‌کنیم:

$$2x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{(2m - 4)x}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - (m - 2)x - \frac{3}{2} = 0$$

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله فوق باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = 2m$$

در معادله درجه ۲ با ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  از طریق اتحاد جمله مشترک داریم:



$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

اگر معادله صورت سوال را مساوی عبارت روبه‌رو قرار دهیم مجموع ریشه‌ها برابر می‌شود با قرینه ضریب  $x$ :

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$(x_1 + x_2) = (m - 2) \Rightarrow x_1 + x_2 = m - 2$$

و چون  $m$  واسطه حسابی ریشه‌ها است می‌توان نوشت:

$$m - 2 = 2m \Rightarrow 2m - m = -2 \Rightarrow m = -2$$

۷ ابتدا معادله روبه‌رو را حل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

برای حل معادله درجه دوم می‌توان از روش تجزیه (اتحاد جمله مشترک) استفاده کرد.

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x^2 + (-7 + 3)x + (3)(-7) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 7) \times (x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 7 \end{cases}$$

اگر عدد  $m$ ، واسطه حسابی بین  $-3$  و  $7$  باشد، داریم:

$$7 + (-3) = 2m$$

$$\Rightarrow 7 - 3 = 2m \Rightarrow 4 = 2m \Rightarrow m = 2$$

۸ اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی از دنباله حسابی را داشته باشیم، واسطه حسابی آن برابر است با:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$a, b, c \Rightarrow a + c = 2b$$

پس برای جملات متوالی  $2m - 4, m + 5, 3m - 1$  داریم:

$$m + 5 = \frac{(3m - 1) + (2m - 4)}{2}$$

$$(3m - 1) + (2m - 4) = 2(m + 5)$$

$$3m - 1 + 2m - 4 = 2m + 10$$

$$5m - 5 = 2m + 10 \Rightarrow 5m - 2m = 10 + 5$$

$$3m = 15 \Rightarrow m = 5$$

بنابراین مقدار  $m$  با ۵ برابر است.

۹ برای به دست آوردن مجموع جملات از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_1 = 5, \quad d = 12 - 5 = 7$$

شماره جمله  $a_n = 103$  و تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 5 + (n - 1) \times 7 \Rightarrow 103 = 7n - 2 \Rightarrow n = \frac{105}{7} = 15$$

بنابراین مجموع ۱۵ جمله را می‌خواهیم حساب کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2} (2 \times 5 + (15 - 1) \times 7)$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (10 + 14 \times 7) = \frac{15}{2} \times (10 + 98) = \frac{15}{2} \times (108) = 15 \times 54 = 810$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$S_{15} = 810$$

۱۰ الف) دنباله  $1, 2, 3, \dots$  دنباله‌ای حسابی با  $a_1 = 1$  و  $d = 1$  است، بنابراین مجموع جملات داده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n, \quad n = n, \quad a_1 = 1, \quad d = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2 \times (1) + (n - 1) \times 1) = \frac{n}{2} (2 + (n - 1)) = \frac{n}{2} (n + 1) = \frac{n^2 + n}{2}$$

ب) دنباله  $1, 3, 5, \dots$  دنباله‌ای حسابی با  $a_1 = 1$  و  $d = 2$  است. بنابراین:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$$

$$n = n, \quad a_1 = 1, \quad d = 2$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (2(1) + (n - 1) \times 2) = \frac{n}{2} (2 + (n - 1) \times 2) = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

۱۱ با توجه به نمودار داریم:

$n$	۱	۲	۳	۴	۵
$a_n$	۲	-۳	۱	۴	۰

بنابراین داریم:

$$a_7 + a_7 + a_7 - a_5 = -3 + 1 + 4 - 0 = 2$$

۱۲) با توجه به متن سوال جمله عمومی دنباله به صورت  $a_{2n+1} = \frac{n+2}{2n-3}$  است.

برای آنکه جمله ۱۱ام ( $a_{11}$ ) را بیابیم، ابتدا  $2n + 1$  را برابر ۱۱ قرار می‌دهیم تا مقدار  $n$  مشخص شود:

$$2n + 1 = 11 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

حال با قرار دادن  $n = 5$  در رابطه جمله عمومی، جمله  $a_{11}$  پیدا می‌شود.

$$a_{2n+1} = \frac{n+2}{2n-3} \xrightarrow{n=5} a_{11} = \frac{5+2}{2(5)-3} = \frac{7}{7} = 1$$

۱۳)

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4} = \frac{22 - 10}{4} = 3, \quad 10, 13, 16, 19, 22$$

۱۴) برای به دست آوردن چهار جمله اول، به جای  $n$  مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ را جایگزین می‌کنیم. بنابراین:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

۱۵)

با توجه به رابطه دنباله، دنباله حسابی است و داریم:

$$a_1 = -2, \quad a_5 = 5 + a_1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow d = 3 - (-2) = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d], \quad a_1 = -2, \quad d = 5$$

$$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}[-4 + (12-1) \times 5] = 306$$

۱۶)

الف)  $a_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$

$$a_2 = 3 \times 2 + 2 = 8$$

$$a_3 = 3 \times 3 + 2 = 11$$

$$a_4 = 3 \times 4 + 2 = 14$$

ب)

$$5, 11, 17, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + 6$$

۱۷)

الف)

$$\frac{5}{\sqrt{(0.9)^4}}$$

۱۸)

الف) نادرست

۱۹)

الف)

$$a_{10} = a_1 + 9d = 32$$

$$9d = 27 \Rightarrow d = 3$$

ب)

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2(5) + 19(3)] = 670$$

۲۰)

پاسخ: با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{cases} a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 61 = a_1 + 8d \\ a_{16} = a_1 + 15d \Rightarrow 96 = a_1 + 15d \end{cases} \Rightarrow 15d - 8d = 96 - 61 \Rightarrow 7d = 35 \Rightarrow d = 5$$



جمله نهم ۶۱ است. با داشتن  $d$  داریم:

$$a_1 + 8d = 61 \Rightarrow a_1 + 40 = 61 \Rightarrow a_1 = 21$$

$$\rightarrow a_{30} = 21 + 29 \times 5 = 166$$