



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی ۱۲ انسانی فصل ۳ تشریحی

تاریخ آزمون:



۱) هریک از عبارات‌های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارات‌های رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

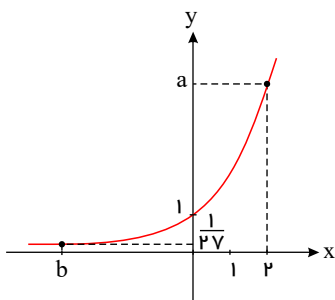
الف  $(\frac{1}{5})^{\frac{3}{4}}$

ب  $\sqrt[7]{0,18}$

۲) نمودارهای  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = 4^x$  و  $h(x) = 5^x$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۳) دامنه تابع  $f(x) = 5^{x-1} + 3$  را بدست آورید.

۴) اگر نمودار مقابل،  $f(x) = 3^x$  باشد، آنگاه  $a$  و  $b$  را بدست آورید.



۵) اگر  $a = 3\sqrt{3}$  باشد، حاصل  $9a^{\frac{2}{3}}$  را بدست آورید.

۶) حاصل ضرب ریشه دوم  $2^6$  و ریشه منفی دوم  $3^6$  را بدست آورید.

۷) ریشه چهارم عدد ۲۵۶ را بدست آورید.

۸) مقدار  $x$  را از معادله  $\sqrt[3]{x} = x$  بدست آورید.

۹) حاصل  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$  را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۰) عدد  $17^{\frac{1}{3}}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۱) حاصل عبارت  $A = 125^{\frac{1}{2}} \times 125^{\frac{1}{7}} + 16^{\frac{3}{4}}$  را بدست آورید.

۱۲) در دنباله  $1, 6, 18, \dots$  جمله هفتم و حاصل جمع هفت جمله اول را به دست آورید.

۱۳) مجموع چه تعداد از دنباله  $5, 10, 20, \dots$  برابر ۱۵۵ می‌شود؟

۱۴) جمله چهارم یک دنباله هندسی ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم آن ۶۰ است. نسبت مشترک را به دست آورید.

۱۵) حاصلضرب ۵ عدد که با هم تشکیل دنباله هندسی می‌دهند ۲۴۳ است. یکی از این اعداد حتماً چه عددی است؟

۱۶) در یک دنباله هندسی  $2 = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 = a_1$  است. مجموع چند جمله از این دنباله ۱۸۹ است؟

۱۷) حاصل  $\frac{1 + x + x^2 + \dots + x^{11}}{1 + x^3 + x^6 + x^9}$  را به ازای  $x = \sqrt{2}$  بدست آورید.

۱۸) جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) ریشه چهارم عدد ۱۶ برابر ..... و ..... می‌باشد.

۱۹) جمعیت شهری در سال ۱۴۰۰ شمسی حدود دو میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۱۰٪

درصد در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر در سال چند نفر خواهد بود؟

۲۰) اعداد توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارات‌های رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف)  $\sqrt[3]{x^5}$

ب)  $(0,1)^{\frac{1}{3}}$

پ)  $(a)^{\frac{3}{8}}$



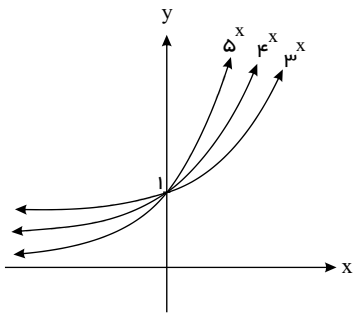


# پاسخنامه تشریحی

۱

الف)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

ب)  $\sqrt[5]{0.18} = (0.18)^{\frac{1}{5}}$



۲

دامنه:  $D_f: \mathbb{R}$

$x = 2 \rightarrow y = 3^x = 9 \Rightarrow a = 9$

$\frac{1}{27} = 3^b \Rightarrow \frac{1}{3^3} = 3^b \Rightarrow 3^{-3} = 3^b \Rightarrow b = -3$

$a = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \Rightarrow 9a^{\frac{2}{3}} = 9(\sqrt{27})^{\frac{2}{3}} = 9((27)^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}}$   
 $= 9 \times 27^{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 9 \times 27^{\frac{1}{3}} = 9 \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 9 \times 3 = 27$

$\left. \begin{array}{l} 3^6 = 27^2 : \text{ریشه سوم} \\ 3^6 = 27^2 : \text{ریشه منفی دوم} \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \times -27 = -108$

$x^4 = 256 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} = \pm \sqrt[4]{2^8} = \pm 2^2 = \pm 4$

طرفین به توان ۳  
 $\sqrt[3]{x} = x \rightarrow x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0$   
 $x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

۹  
 $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 + \sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|2 - \sqrt{3}|}_{\text{مثبت}}$   
 $= 1 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 3$

۳ هر عددی را می‌توانیم به جای  $x$  قرار دهیم، بنابراین داریم:

۴ اگر به جای  $x$  عدد ۳ را قرار دهیم،  $y$  برابر  $a$  می‌شود:

و اگر به جای  $x$  عدد  $b$  را قرار دهیم،  $y$  برابر  $\frac{1}{27}$  می‌شود.

۵

۶

۷

با توجه به تعریف ریشه چهارم داریم:

۸

۱۰ عدد  $\sqrt[3]{17}$  بین دو عدد  $\sqrt[3]{8}$  و  $\sqrt[3]{27}$  قرار دارد پس داریم:



$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{17} < \sqrt[3]{27}$$

$$\sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{17} < \sqrt[3]{3^3} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{17} < 3$$

پس بین دو عدد ۲، ۳ قرار می‌گیرد.

(۱۱)

$$\begin{cases} 125^{\frac{1}{5}} = (\delta^3)^{\frac{1}{5}} = \delta^{\frac{3}{5}} = \sqrt{\delta} \\ 125^{\frac{1}{5}} = \sqrt{125} \\ 16^{\frac{2}{5}} = (2^4)^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{8}{5}} = 8 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\delta} \times \sqrt{125} = \sqrt{\delta \times 125} = \sqrt{\delta^5} = \delta^{\frac{5}{2}} = \delta^2 = 25$$

$$A = 25 + 8 = 33$$

(۱۲) ابتدا نسبت مشترک را به دست آورده و سپس خواهیم داشت:

$$a_1 = 2$$

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_5 = 2 \times 3^4 = 1458$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = 2 \times \frac{1-3^5}{1-3} = 2 \times \frac{1-243}{-2} = 3^5 - 1 = 242$$

(۱۳) می‌دانیم مجموع جملات دنباله هندسی از رابطه  $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$  به دست می‌آید، بنابراین:

$$a_1 = 5, r = \frac{10}{5} = 2, S_n = 155, n = ?$$

$$155 = 5 \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow -31 = 1-2^n \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

(۱۴) با استفاده از جمله عمومی و دنباله هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_6 = 10 \Rightarrow a_1 r^5 = 10 \quad (1)$$

$$a_5 + a_6 = 60 \Rightarrow a_1 r^4 + a_1 r^5 = 60 \Rightarrow a_1 r^4 (1+r) = 60 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^5}{a_1 r^4 (1+r)} = \frac{10}{60} \Rightarrow \frac{1}{1+r} = \frac{1}{6} \Rightarrow r(r+1) = 6 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = 2 \end{cases}$$

(۱۵) چون تعداد جملات فرد است بهتر است آن‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

جملات دنباله:  $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 243 \Rightarrow a^5 = 243 \times r^5 = 3^5 \Rightarrow a = 3$$

پس یکی از این اعداد حتماً ۳ است.

(۱۶) از عبارت  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$  به این نتیجه می‌رسیم که حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی برابر ۲ است، بنابراین نسبت مشترک ۲ است. پس:

$$a_1 = 3, r = 2, S_n = 189, n = ?$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow 189 = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow 189 = -3 \times (1-2^n)$$

$$\Rightarrow -63 = 1-2^n \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

(۱۷) عبارت صورت سؤال مجموع ۱۲ جمله از دنباله هندسی با جمله اول ۱ و نسبت مشترک  $x$  است، بنابراین داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_{12} = 1 \times \frac{1-x^{12}}{1-x}$$

و عبارت مخرج سؤال مجموع ۴ جمله از دنباله هندسی با جمله اول ۱ و نسبت مشترک  $x^3$  است، بنابراین داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_4 = 1 \times \frac{1-(x^3)^4}{1-x^3} = \frac{1-x^{12}}{1-x^3}$$

بنابراین از تقسیم این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{1-x^{12}}{1-x} = \frac{1-x^{12}}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = 1+x+x^2 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} 1+\sqrt{2}+2 = 3+\sqrt{2}$$



۱۸

+۲, -۲

الف

$$19) r = \frac{10}{100} = 0/1, \quad c = 2,000,000, \quad f(t) = c(1+r)^t$$

$$\Rightarrow f(1) = y = 2,000,000(1+0/1)^1 = 2,000,000 \times 1/1 = 2,200,000$$

الف)  $x^{\frac{5}{6}}$

ب)  $\sqrt[3]{0,1}$

پ)  $\sqrt[4]{a^3}$

۲۰