



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۹۰ دقیقه



نام آزمون: ریاضی ۱۲ انسانی آزمون جامع تشریحی

تاریخ آزمون:

- ۱ در یک دنباله حسابی که دارای ۱۰۰ جمله است، مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر برابر ۳۰۰ است، حاصل جمع تمام جملات چند است؟
- ۲ اگر $f(x) = (2 + k)x^2 + 3^x$ تابعی نمایی باشد، آنگاه $f(x) = (k + 4)^x$ به ازای $x = 3$ چه عرضی دارد؟
- ۳ ریشه دوم عدد -4 را بدست آورید.
- ۴ مجموع ۱۰ جمله اول دنباله $a_n = (-1)^{n+1} \times (11 - n)^2$ را بیابید.
- ۵ واسطه هندسی بین دو عدد $2 - \sqrt{5}$ و $2 + \sqrt{5}$ را در صورت وجود به دست آورید.
- ۶ در یک دنباله هندسی مجموع دو جمله اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ است. نسبت مشترک را به دست آورید.
- ۷ بعد از گذشت ۳ نیمه عمر، چند درصد یک دارو در بدن باقی می ماند؟
- ۸ جمله عمومی دنباله هندسی $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ را بنویسید.
- ۹ در یک دنباله هندسی $a_3 = 27$ و $a_5 = 243$ است. جمله نهم را به دست آورید.
- ۱۰ بین ۶ و ۱۹۲ چهار عدد را به گونه ای قرار داده ایم که این ۶ عدد با هم تشکیل دنباله هندسی دهند. آن جملات کدام اند؟
- ۱۱ در دنباله هندسی $\dots, 12 + x, x, x - 8, \dots$ جمله پنجم را به دست آورید. (می دانیم x عددی مثبت است)
- ۱۲ خانواده ای دارای سه فرزند است. مطلوب است:
الف) فضای نمونه جنسیت فرزندان این خانواده.
ب) پیشامد A که هر سه فرزند از یک جنسیت باشند.
پ) پیشامد B که فقط یک دختر داشته باشند.
ت) پیشامد C که حداقل دو پسر داشته باشند.
ث) پیشامد D که حداکثر یک پسر داشته باشند.
- ۱۳ هر از فضای نمونه را یک پیشامد می گوئیم.
- ۱۴ پیشامد S را در فضای نمونه S یک پیشامد می نامیم.
- ۱۵ ۲۰ کتاب روان شناسی و ۲۵ کتاب علوم تربیتی مختلف در یک کتابخانه موجود است.
الف) به چند طریق می توان یک کتاب روان شناسی یا یک کتاب علوم تربیتی را انتخاب کرد.
ب) به چند طریق می توان یک کتاب روان شناسی و یک کتاب تربیتی انتخاب کرد.
- ۱۶ نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را رسم کنید.
- ۱۷ در دنباله هندسی زیر با فرض نسبت مشترک مثبت آن را به دست آورید، سپس جاهای خالی را پر کنید.

۷, □, □, □, ۱۱۲

۱۸ با توجه به دنباله های $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$, $b_n = n + 4$, $c_n = \frac{n}{2}$ حاصل عبارت $a_1 + b_8 - c_7$ را به دست آورید.

۱۹ به چند طریق می توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد.

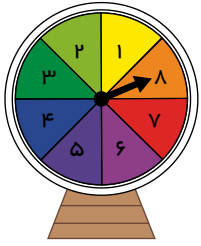




۲۰ عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که: الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.





پاسخنامه تشریحی

۱ در دنباله حسابی a_n داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_l = a_k + a_p$$

طبق فرض داریم:

$$a_1 + a_7 + a_9 + a_{18} + a_{29} + a_{100} = 300$$

$$a_1 + a_{100} = a_7 + a_{99} = a_9 + a_{98} \Rightarrow 3(a_1 + a_{100}) = 300$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{100} = \frac{300}{3} = 100$$

حاصل جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}(a_1 + a_{100}) = 50(a_1 + a_{100})$$

$$\xrightarrow{a_1 + a_{100} = 100} S_{100} = 50 \times (100) = 5000$$

۲ تابع نمایی به صورت $f(x) = a^x$ می‌باشد، بنابراین ضریب x^2 باید صفر شود:

$$2 + k = 0 \rightarrow k = -2$$

$$f(x) = (-2 + 4)^x = 2^x \xrightarrow{x=2} 2^2 = 4$$

۳ اعداد منفی ریشه دوم ندارند، زیرا عدد منفی نمی‌تواند زیر رادیکال یا فرجه زوج قرار گیرد.

۴ با توجه به رابطه دنباله، جملات ۱ تا ۱۰ را می‌یابیم.

$$a_n = (-1)^{n+1} \times (11 - n)^2 \begin{cases} n=1 \rightarrow (-1)^2 \times (11-1)^2 = 10^2 \\ n=2 \rightarrow (-1)^3 \times (11-2)^2 = -9^2 \\ n=3 \rightarrow (-1)^4 \times (11-3)^2 = 8^2 \\ \vdots \\ n=10 \rightarrow (-1)^{11} \times (11-10)^2 = -1^2 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جمله اول به صورت مقابل است.

$$S_{10} = \underbrace{10^2 - 9^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} + \underbrace{8^2 - 7^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} + \dots + \underbrace{2^2 - 1^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$S_{10} = \cancel{10}^1 \cancel{10}^1 - \cancel{9}^1 \cancel{9}^1 + \cancel{8}^1 \cancel{8}^1 - \cancel{7}^1 \cancel{7}^1 + \dots + \cancel{2}^1 \cancel{2}^1 - \cancel{1}^1 \cancel{1}^1 = 10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1$$

مجموع اعداد طبیعی کوچکتر مساوی n از رابطه زیر به دست می‌آید. (دنباله‌ای حسابی با $a_1 = 1$ و $d = 1$)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

۵ می‌دانیم اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد $b^2 = ac$ است. بنابراین:

$$b^2 = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 4 - 5 = -1 \Rightarrow b^2 = -1 \quad \text{غیر ممکن}$$

چون به رابطه غیر قابل قبول رسیدیم پس نمی‌توان واسطه هندسی بین این دو عدد تعیین کرد.

۶ با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی و اطلاعات سوال:

$$a_1 + a_7 = 28 \Rightarrow a_1 + a_1 r^6 = 28 \Rightarrow a_1(1 + r^6) = 28 \quad (1)$$

$$a_7 + a_9 = 12 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^8 = 12 \Rightarrow a_1 r(1 + r^7) = 12 \quad (2)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1 + r^6}{r(1 + r)} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{اتحاد}} \frac{(1+r^6)(1+r)}{r(1+r)} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - 3r + 3r^7 = 7r \Rightarrow 3r^7 - 10r + 3 = 0, a = 30; b = -10, c = 3$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(9) = 64 \Rightarrow r = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$



۷) می‌دانیم بعد از هر نیمه‌عمر مقدار دارو نصف می‌شود، بنابراین اگر مقدار اولیه را ۱ فرض کنیم:

$$1 \xrightarrow{\text{بعد از یک نیمه‌عمر}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بعد از یک نیمه‌عمر}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{بعد از یک نیمه‌عمر}} \frac{1}{8}$$

پس بعد از ۳ نیمه‌عمر $\frac{1}{8}$ آن باقی می‌ماند و برحسب درصد خواهیم داشت:

$$\frac{1}{8} \times 100 = 12,5\%$$

پس ۱۲,۵ درصد دارو باقی می‌ماند.

۸) کافی است نسبت مشترک را به دست آوریم و به کمک فرمول جمله عمومی دنباله هندسی، جمله عمومی این دنباله را بدست آوریم.

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-2}} = 2^{2-2n}$$

۹) با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توان نوشت:

$$a_7 = 27 \rightarrow a_1 r^6 = 27 \quad (1)$$

$$a_8 = 243 \rightarrow a_1 r^7 = 243 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{27}{243} = \frac{1}{9} \Rightarrow r = \pm 3$$

این نسبت مشترک را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$a_1 \times (\pm 3)^6 = 27 \Rightarrow a_1 \times 9 = 27 \Rightarrow a_1 = 3$$

بنابراین جمله نهم برابر است با:

$$a_9 = a_1 r^8 = 3 \times (\pm 3)^8 = 3^9$$

۱۰) ابتدا نسبت مشترک را به کمک فرمول درج واسطه هندسی به دست می‌آوریم:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$r^{4+1} = \frac{192}{6} \Rightarrow r^5 = 32 = 2^5 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین این جملات عبارتند از:

$$\overset{\times 2}{\curvearrowright} 6, 12, 24, 48, 96, 192$$

۱۱) ابتدا x را به دست می‌آوریم، اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ است:

حل معادله درجه دوم به کمک تجزیه:

$$x^2 = 96 + 8x - 12x - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x+8)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$x = 6 \xrightarrow{\text{دنباله را می‌نویسیم}} 2, 6, 18, \dots$$

$$a_1 = 2, r = 3$$

$$\Rightarrow a_8 = a_1 r^7 = 2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374$$

۱۲) الف

$$S = \{(پ،پ،پ)، (د،پ،پ)، (پ،د،پ)، (د،د،پ)، (پ،پ،د)، (د،پ،د)، (پ،د،د)، (د،د،د)\}$$

$$A = \{(پ،پ،پ)، (د،د،د)\}$$

$$B = \{(د،پ،پ)، (پ،د،پ)، (پ،پ،د)\}$$

$$C = \{(پ،پ،پ)، (پ،د،پ)، (د،پ،پ)، (د،د،د)\}$$

$$D = \{(د،د،د)، (د،پ،د)، (پ،د،د)\}$$

ریاضی ۱۲ انسانی آزمون جامع تشریحی

۱۳) زیرمجموعه

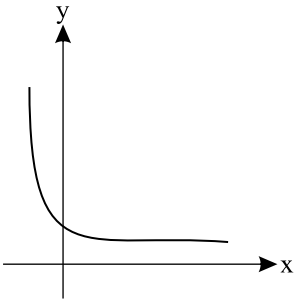
۱۴) حتمی

۱۵)



علوم تربیتی روان‌شناسی
الف) $20 + 25 = 45$
یا

ب) $20 \times 25 = 500$
روان‌شناسی علوم تربیتی



x	-1	0	1
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	2	1	$\frac{1}{2}$

$7, \square, \square, \square, 112$
 a_1 a_5

$$a_5 = a_1 r^4 \rightarrow 112 = 7r^4 \rightarrow 16 = r^4 \rightarrow r = 2$$

$7, 14, 28, 56, 112$

$$a_1 = \frac{1}{(-1)^1} = -1$$

$$b_8 = 8 + 4 = 12$$

$$c_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_1 + b_8 - c_2 = \frac{a_1 = -1, b_8 = 12, c_2 = 1}{-1 + 12 - 1} = 10$$

$$\text{تعداد حالات مطلوب: } C(9, 4) = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{24 \times 5!} = 126$$

$$S = \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

الف) $A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow$ احتمال مطلوب: $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ب) $B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow$ احتمال مطلوب: $P(B) = \frac{5}{8}$

پ) $C = \{3, 6\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow$ احتمال مطلوب: $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

16

17

اعداد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

18 در a_n مقدار $n=1$ در b_n مقدار $n=8$ و در c_n مقدار $n=2$ را جایگزین می‌کنیم:

19 چون در انتخاب 4 کتاب ترتیب مهم نیست، داریم:

20

الف) A پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) B پیشامد اینکه یک عدد اول یا فرد نشان دهد.

پ) C پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد مضرب 3 باشد.