



نام و نام خانوادگی:

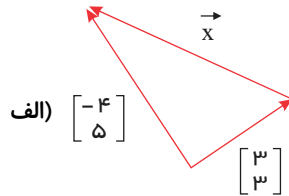
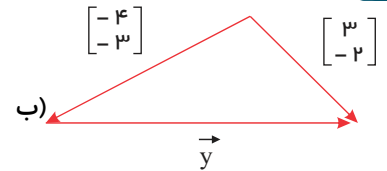
زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه



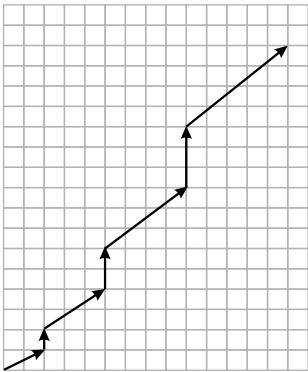
نام آزمون: ریاضی هشتم فصل پنجم تشریحی

تاریخ آزمون:

۱) مختصات بردار  $\vec{x}$  و  $\vec{y}$  را بنویسید.



۲) یک روبات برنامه‌ریزی شده به صورت مقابل از مبدأ مختصات حرکت می‌کند. الگوی حرکت روبات را کشف کنید و توضیح دهید پس از حرکت هشتم روبات به کدام نقطه می‌رسد.



۳) از معادله زیر مختصات بردار  $x$  را بیابید.

$$6\vec{x} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۴) اگر  $\vec{a} = 3\vec{b}$  و  $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$  در این صورت مختصات بردار  $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$  را به دست آورید.

۵) معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

الف)  $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} - 3\vec{x} = - \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

ب)  $10\vec{k} + \begin{bmatrix} -18 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

پ)  $\begin{bmatrix} -18 \\ 27 \end{bmatrix} + \vec{y} = \begin{bmatrix} -15 \\ 12 \end{bmatrix}$

۶) درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را بررسی کنید.

الف) بردارهای  $\vec{a}$  و  $-3\vec{a}$  هم‌راستا هستند.

۷) دو بردار قرینه ..... و ..... هستند.

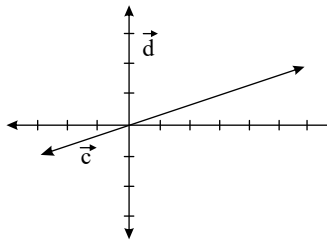
۸) معادله مختصاتی مقابل را حل کنید.

$$-4x + 3\vec{i} + 2\vec{j} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$





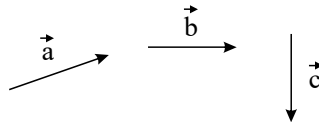
۹ با توجه به شکل مقابل:



الف) یک تساوی ضرب برداری و یک تساوی مختصاتی بنویسید.

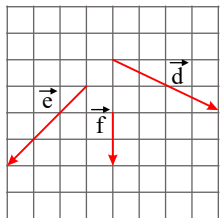
ب) با توجه به بردارهای داده شده بردار  $d$  را رسم کنید.

$$\vec{d} = 5\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}$$



۱۰  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} a+1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ b-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$



۱۱ برآیند سه بردار را رسم کنید.

۱۲ معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

$$4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} \quad -3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

۱۳ در هر قسمت بردار  $p$  را با توجه به بردار  $k$  رسم کنید.

الف)  $\vec{p} = \frac{1}{3}\vec{k}$

ب)  $\vec{p} = 2\vec{k}$

۱۴ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

اگر  $\vec{a} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$  و  $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه مختصات بردار زیر را بیابید.

الف)

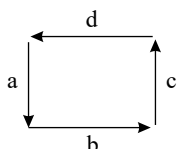
$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$$

ب) اگر دو بردار  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3m+1 \\ 7 \end{bmatrix}$  و  $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2n+1 \end{bmatrix}$  موازی، هم‌اندازه و هم‌جهت باشند، مقدار  $m$ ،  $n$  را بیابید.

۱۵ جملات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

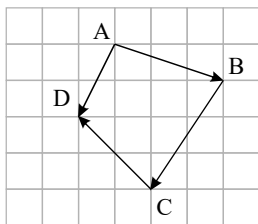
الف) مقدار  $y$  در تساوی  $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$  برابر ..... است.

۱۶ برای شکل مقابل جمع برداری بنویسید.





۱۷) یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی برای شکل مقابل بنویسید.



۱۸) به پرسش‌های چهارگزینه‌ای زیر پاسخ دهید.

الف) اگر بردارهای  $\vec{a} = 4\vec{i} - m\vec{j}$  و  $\vec{b} = n\vec{i} - 4\vec{j}$  برابر هم باشند،  $m - n$  کدام است؟

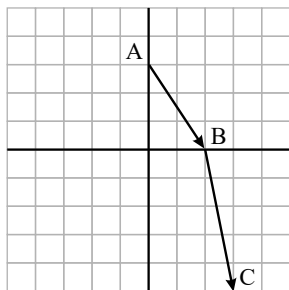
- ۱) ۴    ۲) -۸    ۳) ۸+    ۴) ۰

۱۹) جملات درست را با (✓) و جملات نادرست را با (X) مشخص کنید.

الف) برای قرینه کردن هر بردار نسبت به محور طول‌ها کافی است تنها مختصات عرض بردار را قرینه کنیم.

ب) مجموع دو بردار قرینه همواره برابر بردار صفر است.

۲۰) با توجه به شکل روبه‌رو پاسخ دهید.



الف)

$$A = [ ], B = [ ], \vec{AB} = [ ]$$

ب) بردار برآیند (مجموع)  $\vec{AB}, \vec{BC}$  را رسم کنید.

پ) بین بردارهای  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$  یک تساوی برداری مختصاتی بنویسید.

# پاسخنامه تشریحی

۱

با توجه به شکل و روش جمع مثلثی خواهیم داشت:

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -4-3 \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ +2 \end{bmatrix}$$

مانند قسمت الف با توجه به شکل در روش مثلثی خواهیم داشت:

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} +4+3 \\ -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ +1 \end{bmatrix}$$

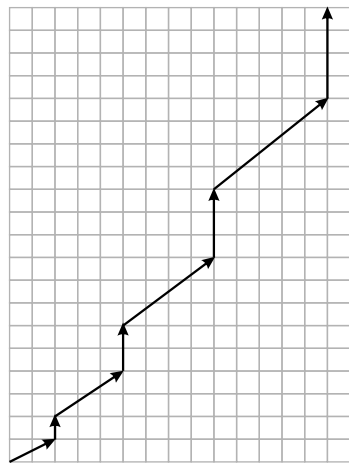
۲

روبات از بردارهایی با دو الگوی متفاوت برنامه‌ریزی شده است: برای بردارهای فرد در هر حرکت، یک واحد به طول و یک واحد به عرض اضافه می‌شود و برای بردارهای زوج در هر حرکت یک واحد به عرض اضافه شده است.

$$B = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{پس از حرکت دوم}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{پس از حرکت چهارم}$$



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \text{پس از حرکت هشتم}$$

۳

$$6\vec{x} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix} \rightarrow 6\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j} - 3x(-3\vec{i} - \vec{j}) = -3\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{i} + 3\vec{j} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} - 3\vec{x} = - \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-3\vec{x} = \begin{bmatrix} -12+5 \\ +1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = -\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{7}{3} \\ +\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } 10\vec{k} + \begin{bmatrix} -18 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$10\vec{k} = \begin{bmatrix} 40 \\ 48 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -18 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow 10\vec{k} = \begin{bmatrix} 40+18 \\ 48-8 \end{bmatrix} \rightarrow 10\vec{k} = \begin{bmatrix} 58 \\ 40 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{k} = \frac{1}{10} \times \begin{bmatrix} 58 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{10} \\ \frac{40}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{پ) } \begin{bmatrix} -18 \\ 27 \end{bmatrix} + \vec{y} = \begin{bmatrix} -15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

۴

۵



$$\vec{y} = \begin{bmatrix} -15 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -18 \\ 27 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} -15 + 18 \\ 12 - 27 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} +3 \\ -15 \end{bmatrix}$$

۶

الف) درست. دو بردار  $\vec{a}$  و  $-3\vec{a}$  موازی و هم‌راستا ولی مخالف جهت یکدیگر هستند.

۷

هم‌اندازه - هم‌راستا - در خلاف جهت

۸

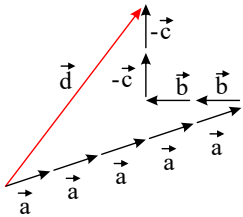
$$-4\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$-4\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = \frac{-1}{4}\vec{x} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۹

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{d} = -2 \times \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{d} = -2\vec{c}$$

ب)



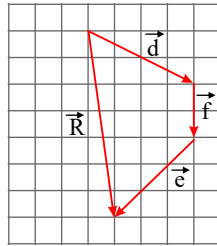
۱۰

$$\begin{bmatrix} a+1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ b-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+1+2 \\ -2+b-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+3 = -8 \\ -5+b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -11 \\ b = 9 \end{cases}$$

۱۱) از روش مثلثی استفاده می‌کنیم به طوری که بردارها را پشت سر هم رسم می‌کنیم به طوری که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق باشد. در این حالت بردار حاصل جمع ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند.

$$\vec{d} + \vec{f} + \vec{e} = \vec{R}$$



۱۲

$$4\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 12 \\ \frac{1}{4} \times (-8) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$-3\vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) \times 15 \\ \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-9) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -4-2 \\ 6-5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۳

$$\vec{p} \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

$$\frac{\vec{p}}{k} \quad \frac{\vec{p}}{k} \quad \frac{\vec{p}}{k}$$

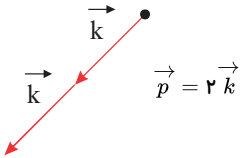
$$\frac{3}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{3} \times k$$

در قسمت الف بردار  $\vec{p}$  برابر است با  $\frac{1}{3}$  بردار  $k$  در نتیجه: طول آن  $\frac{1}{3}$  طول  $k$  است و جهت و راستای آن تغییری نمی‌کند.



در قسمت ب بردار  $\vec{p}$  دو برابر بردار  $\vec{k}$  است در نتیجه: طول آن دو برابر  $\vec{k}$  است و جهت و راستای آن تغییری نمی‌کند.



۱۴

الف

$$a = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ب

دو بردار موازی هم‌اندازه و هم‌جهت باهم برابر هستند پس مؤلفه طول و عرض آنها نیز باهم برابر است.

$$3m + 1 = -2 \rightarrow 3m = -3 \rightarrow m = -1$$

$$2n + 1 = 7 \rightarrow 2n = 6 \rightarrow n = 3$$

۱۵

الف +۴

۱۶ برای این شکل جمع برداری زیر را می‌توان نوشت؛ چون اگر ابتدای بردار  $a$  را به‌عنوان شروع رسم بردارها در نظر بگیریم انتهای بردار آخر روی ابتدای بردار اول منطبق شده است، پس بردار برآیند بردار صفر است.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

۱۷

طبق روش جمع مثلثی بردارهای  $\vec{AB}$ ،  $\vec{BC}$  و  $\vec{CD}$  پشت‌سرهم رسم شده‌اند و بردار حاصل جمع آنها برابر  $\vec{AD}$  است که ابتدا بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۱۸

گزینه ۴ درست است. دو بردار برابر دارای مؤلفه طول و عرض یکسان هستند.

الف

$$n = 4, m = 4 \rightarrow n - m = 0$$

۱۹

الف درست. قرینه بردار  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  نسبت به محور طول‌ها برابر  $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$  است.

ب درست

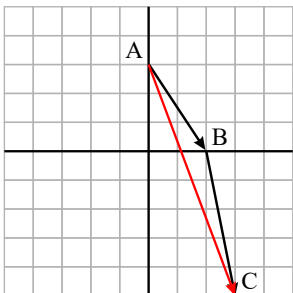
۲۰

الف

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ب

ابتدای بردار  $\vec{AB}$  را به انتهای بردار  $\vec{BC}$  وصل می‌کنیم:



ب

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$